

INGENIERÍA DE ESTRUCTURAS

MCCP CURSO 2014 - 2015

TRABAJO DEL CURSO

L-37 PANTEÓN DE AGRIPA

DAVID BALLESTER RAMÍREZ

46977872G



ÍNDICE PROBLEMA L-37

Panteón de Agripa

1. INTRODUCCIÓN	4
2. OBJETIVOS	4
3. ESTRATÉGIA DE RESOLUCIÓN	4
4. GEOMETRÍA Y MATERIALES	5
5. CONDICIONES DE CONTORNO	6
5.1 Condiciones de contorno modelo 2D	6
5.2 Condiciones de contorno modelo 3D	6
5.2.1 <i>Superficie base</i>	6
5.2.2 <i>Sección transversal con normal en dirección x</i>	7
5.2.3 <i>Sección transversal con normal en dirección y</i>	7
6. MALLADO Y ELEMENTOS FINITOS	7
7. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA. RESULTADOS NUMÉRICOS	8
7.1 Tabla de convergencia para elementos triangulares de 3 nodos	8
7.2 Tabla de convergencia para elementos triangulares de 6 nodos	9
7.3 Gráfico de convergencia de desplazamientos máximos en X	9
7.4 Gráfico de convergencia de desplazamientos máximos en Y	9
7.5 Gráfico de convergencia de tensiones máximas de tracción	10
7.6 Gráfico de convergencia de tensiones máximas de compresión	10
7.7 Conclusiones de convergencia	10
8. RESULTADOS GRÁFICOS	11
8.1 Resultados modelo 2D	11
8.1.1 <i>Desplazamientos en X</i>	11
8.1.2 <i>Desplazamientos en Y</i>	11
8.1.3 <i>Tensiones principales S_i</i>	11
8.1.4 <i>Tensiones principales S_{iii}</i>	11

8.1.5 <i>Tensiones principales S_x</i>	12
8.1.6 <i>Tensiones principales S_y</i>	12
8.1.7 <i>Tensiones principales T_{xy}</i>	12
8.1.8 <i>Deformada - (x2350)</i>	12
8.2 Resultados modelo 3D	13
8.2.1 <i>Desplazamientos en X</i>	13
8.2.2 <i>Desplazamientos en Y</i>	13
8.2.3 <i>Desplazamientos en Z</i>	13
9. CÁLCULO DEL FACTOR DE SEGURIDAD - FS	14
10. CONCLUSIONES	14
11. ASPECTOS TEÓRICOS DE LOS ELEMENTOS DE SÓLIDO DE REVOLUCIÓN	15
11.1 <i>Campo de desplazamientos</i>	15
11.2 <i>Campo de deformaciones, tensiones y ecuación constitutiva</i>	15
11.3 <i>Discretización del campo de movimientos - PTV</i>	16
11.4 <i>Elementos finitos de revolución</i>	17
11.5 <i>Obtención matriz de rigidez</i>	17

PROBLEMA L-37

Panteón de Agripa

1. INTRODUCCIÓN

El Panteón de Agripa o Panteón de Roma es un templo de planta circular erigido por Adriano, entre los años 118 y 125 d.C. En la ciudad, es conocido popularmente como *La Rotonda*, de ahí el nombre de la plaza en que se encuentra. Este sobrenombre es debido a su perfecta simetría de revolución respecto a un eje vertical que se halla justo en el centro del templo, generando una cúpula con una claraboya en su cúspide y unas paredes laterales de mayor grosor con el fin de soportar las cargas verticales que transmite la cúpula.

2. OBJETIVOS

En este problema se pretende calcular el factor de seguridad de la estructura frente a las cargas del peso propio con el fin de conocer el estado resistente de la estructura. Debido a su antigüedad y valor patrimonial, la estructura es de gran interés para la conservación. Uno de los principales problemas de estas estructuras antiguas es que fueron construidas con materiales muy pesados y a menudo sin ningún tipo de argamasa o cemento que uniera los bloques de piedra, es por esto que es interesante, no solo conocer el factor de seguridad sino también su estado tensional.

En el enunciado se determinan los valores máximos de tensión y compresión que se puede asumir en cualquier punto de la estructura. Estos valores nos servirán como valor de referencia para el cálculo del factor de seguridad y son,

- Tracciones máximas admisibles: $\sigma_{RT} = 1.8 \text{ MPa}$
- Compresiones máximas admisibles: $\sigma_{RC} = 70 \text{ MPa}$

3. ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN

Para la resolución de este problema se han implementado dos modelos para reforzar la verosimilitud de los resultados obtenidos. En primer lugar se realiza un modelo de sólido de revolución con Gid, usando un módulo Ramseries, problem type "Rev_solid", con elementos planos de revolución, que será económico y de fácil trato en cuanto a obtención de resultados y análisis de convergencia.

A continuación, se corroborarán los resultados con un modelo 3D con el programa Ramseries de un cuarto de la estructura con elementos tetraédricos. Sobre este último no se realizará análisis de convergencia ya que su función es la de dar una idea más clara del comportamiento de la estructura y no se usará para el cálculo del FS.

Una vez se hayan obtenido los resultados con el modelo de sólido de revolución se calcularán dos factores de seguridad,

- Factor de seguridad a la compresión: $FS_C = \frac{\sigma_{resistente\ C}}{\sigma_{max.C}} = \frac{70\ MPa}{S_I}$
- Factor de seguridad a la tracción: $FS_T = \frac{\sigma_{resistente\ T}}{\sigma_{max.T}} = \frac{1.8\ MPa}{S_{III}}$

Donde S_I y S_{III} son las tensiones máximas de compresión y tracción respectivamente que resultan del cálculo.

4. GEOMETRÍA Y MATERIALES

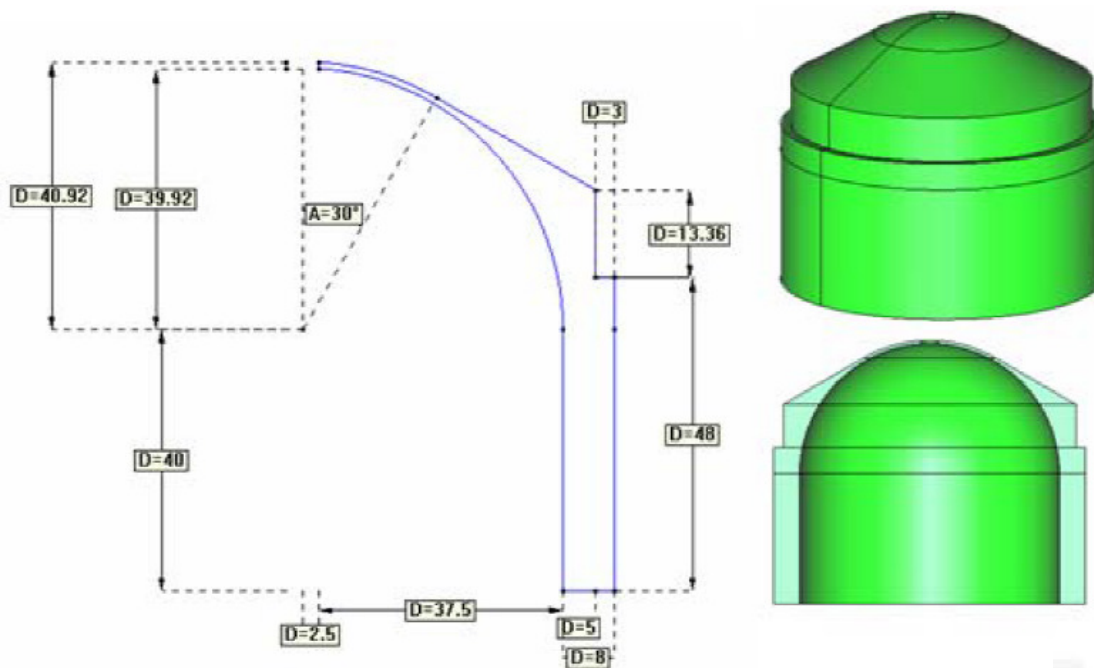


Figura 1. Geometría de la sección transversal

Cabe destacar que en la parte superior de la cúpula no existe una pieza clave, sino que se encuentra una claraboya circular de 2.5 m de radio.

El material usado para la construcción del panteón fue la piedra. Sus características mecánicas vienen dadas en el enunciado y son,

- Modulo de young: $E=15.7\ GPa$
- Poisson: $\nu=0.18$
- Peso específico: $\gamma_p=1200\ Kg/m^3$

La implantación de la geometría en Gid para elementos de revolución no ofrece mayor dificultad que la de encontrar los puntos medios de los arcos, que pueden ser hallados con un simple cálculo. En la implementación de modelo 3D se requiere la misma geometría plana y una extrusión de rotación de 90 grados. Las geometrías tiene el siguiente aspecto,

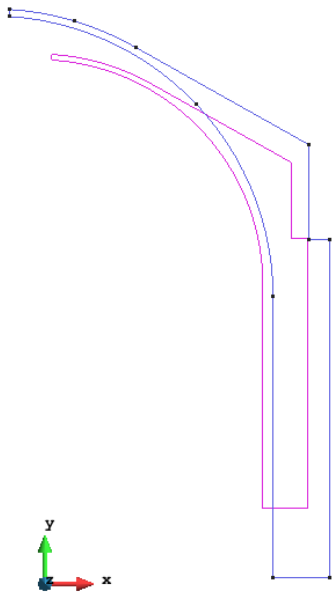


Figura 2. Geometría 2D

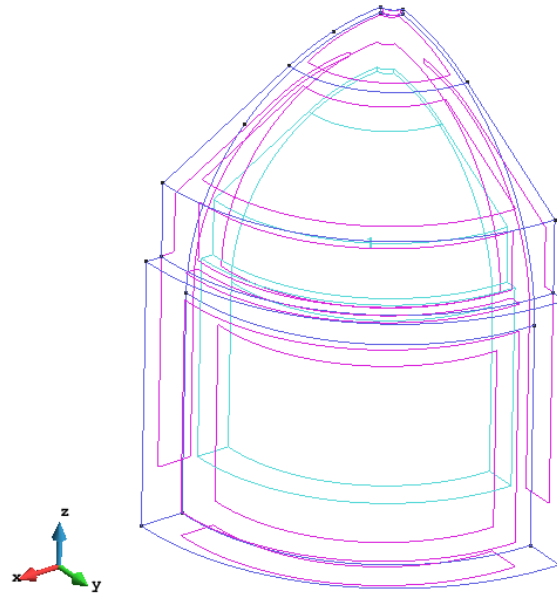


Figura 3. Geometría 3D

5. CONDICIONES DE CONTORNO

5.1 Condiciones de contorno modelo 2D

Los grados de libertad de un modelo para sólidos de revolución son 2. Por lo tanto se deberán restringir estos dos movimientos en la base de la estructura. En la parte superior de la cúpula no se debe restringir ningún movimiento ya que esta no se encuentra en contacto con el eje de simetría y por ende tiene todos sus movimientos posibles libres.

Así pues, las condiciones de contorno en toda la superficie de la base se consideran empotradas,

$$\mathbf{u}_{base} = \{u = 0 ; w = 0\}$$

5.2 Condiciones de contorno modelo 3D

Un modelo 3D tiene un mayor número de grados de libertad que el modelo 2D, en concreto existen 6 movimientos posibles. El modelo 3D presenta dificultades extra debido a la simplificación por simetría que se ha realizado. Para aplicar correctamente las condiciones de contorno se deben tener en cuenta 3 superficies.

5.2.1 Superficie base

Los movimientos impedidos en la base, al tratarse de un empotramiento serán,

$$\{u = 0 ; v = 0 ; w = 0 ; \theta_x = 0 ; \theta_y = 0 ; \theta_z = 0\}$$

5.2.2 Sección transversal con normal en dirección x

En esta superficie con normal en dirección x se deberán restringir los siguientes valores de los posibles movimientos.

$$\{u = 0; v; w; \theta_x; \theta_y = 0; \theta_z = 0\}$$

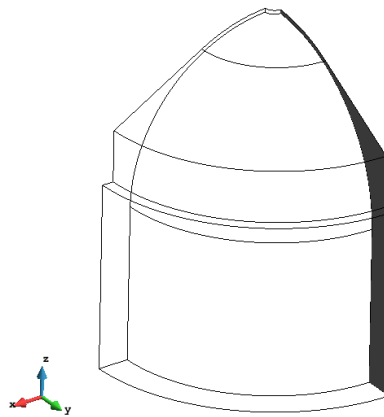


Figura 4. Condiciones de contorno en corte transversal con normal en dirección x - (-1,0,0)

5.2.3 Sección transversal con normal en dirección y

En esta superficie con normal en dirección y se deberán restringir los siguientes valores de los posibles movimientos.

$$\{u; v = 0; w; \theta_x = 0; \theta_y; \theta_z = 0\}$$

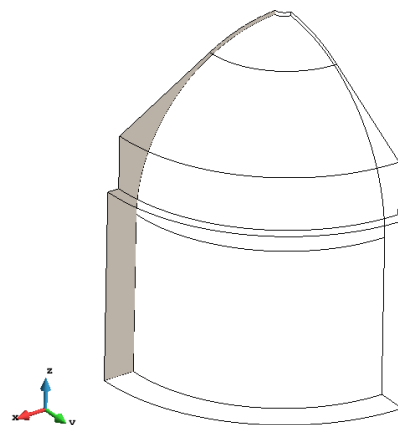


Figura 5. Condiciones de contorno en corte transversal con normal en dirección y - (0,-1,0)

6. MALLADO Y ELEMENTOS FINITOS

La geometría irregular de la estructura dificulta el uso de elementos poco flexibles. Esto quiere decir que para la generación de mallas se usaran elementos triangulares de 3 y 6 nodos en los elementos de sólido de revolución. Para el modelo tridimensional se implementaran elementos tetraédricos lineales de 4 nodos.

Se implementará malla no estructurada ya que es más flexible para geometrías irregulares como la de estudio.

Las mallas tienen el siguiente aspecto,

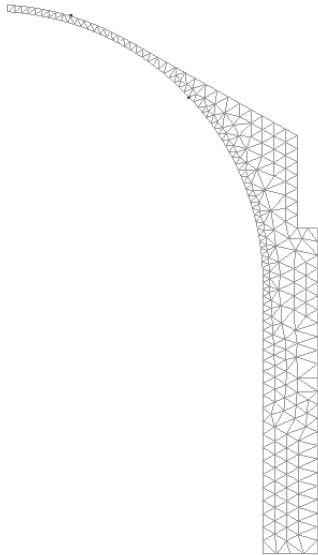


Figura 6. Malla de elementos triangulares de 3 o 6 nodos con $s=2$

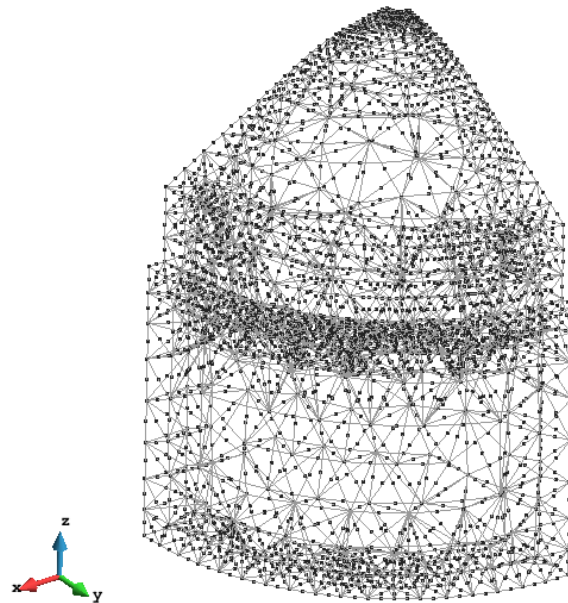


Figura 7. Malla de elementos tetraédricos con tamaño de elemento $S=1$

7. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA. RESULTADOS NUMÉRICOS

Como se ha comentado en el apartado 3 el análisis de convergencia se va a realizar exclusivamente con el modelo bidimensional de sólido de revolución. Para ello se estudiará la convergencia de los desplazamientos y las tensiones principales bajo el efecto del peso propio de la estructura.

Para el estudio de convergencia no se han usado los valores de las tensiones en las direcciones cartesianas ya que estas, a causa de la geometría irregular, no nos determinan de forma inequívoca los valores de tracción y/o compresión para cualquier punto del dominio. Por lo tanto se usan los valores máximos de las tensiones principales S_i y S_{iii} , que equivalen a las tensiones máximas de tracción y compresión respectivamente.

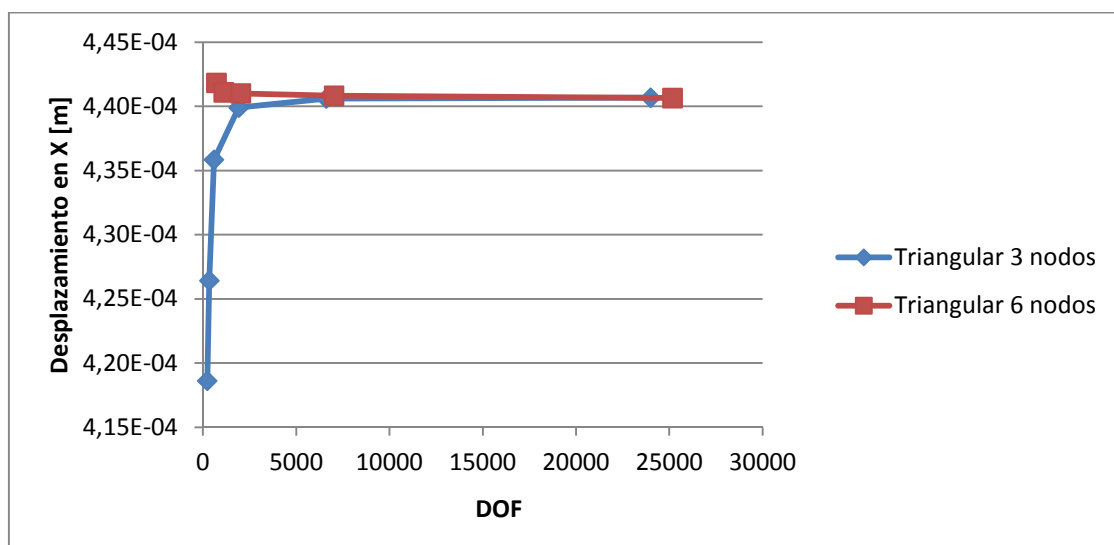
7.1 Tabla de convergencia para elementos triangulares de 3 nodos

Triangular 3 nodos									
Elem. Size	Nelem	Nnode	DOF	max.disp x	max.disp y	Si	Sii	Siii	
4	138	113	226	4,19E-04	-2,31E-03	1,01E+05	-2,86E+05	-9,24E+05	
3	223	168	336	4,26E-04	-2,65E-03	1,08E+05	-2,90E+05	-9,74E+05	
2	425	294	588	4,36E-04	-2,66E-03	1,10E+05	-2,92E+05	-1,03E+06	
1	1599	958	1916	4,40E-04	-2,68E-03	1,17E+05	-3,22E+05	-1,14E+06	
0,5	5980	3304	6608	4,41E-04	-2,68E-03	1,20E+05	-3,40E+05	-1,29E+06	
0,25	22742	11997	23994	4,41E-04	-2,68E-03	1,21E+05	-3,42E+05	-1,47E+06	

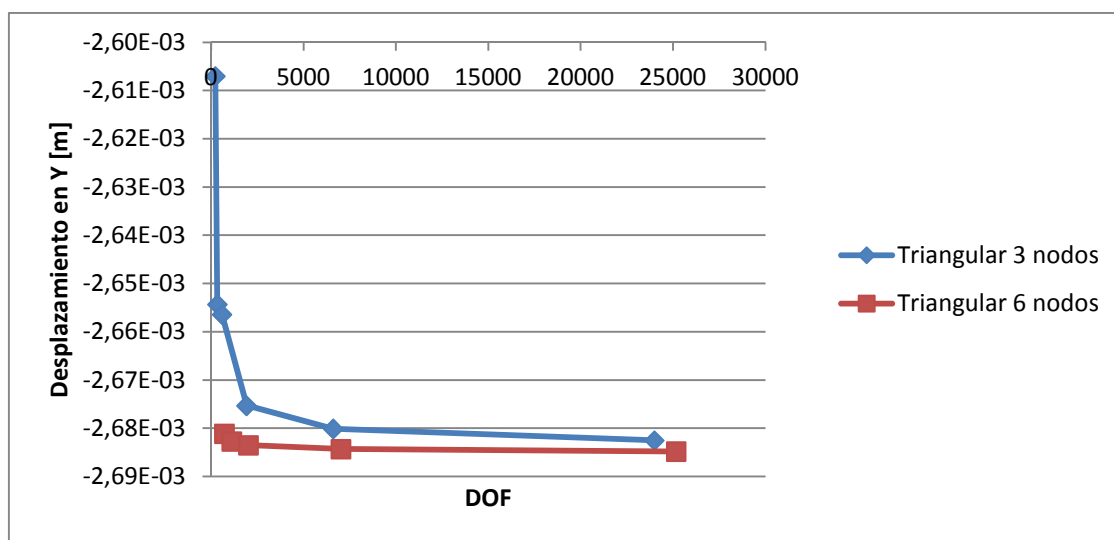
7.2 Tabla de convergencia para elementos triangulares de 6 nodos

Triangular 6 nodos								
Elem. Size	Nelem	Nnode	DOF	max.disp x	max.disp y	Si	Sii	Siii
4	138	361	722	4,42E-04	-2,68E-03	1,15E+05	-3,29E+05	-9,87E+05
3	223	556	1112	4,41E-04	-2,68E-03	1,18E+05	-3,27E+05	-1,04E+06
2	425	1010	2020	4,41E-04	-2,68E-03	1,18E+05	-3,30E+05	-1,10E+06
1	1599	3512	7024	4,41E-04	-2,68E-03	1,20E+05	-3,42E+05	-1,24E+06
0,5	5980	12585	25170	4,41E-04	-2,68E-03	1,21E+05	-3,43E+05	-1,42E+06
0,25	22742	46733	93466	No converge - Demasiada memoria CPU requerida				

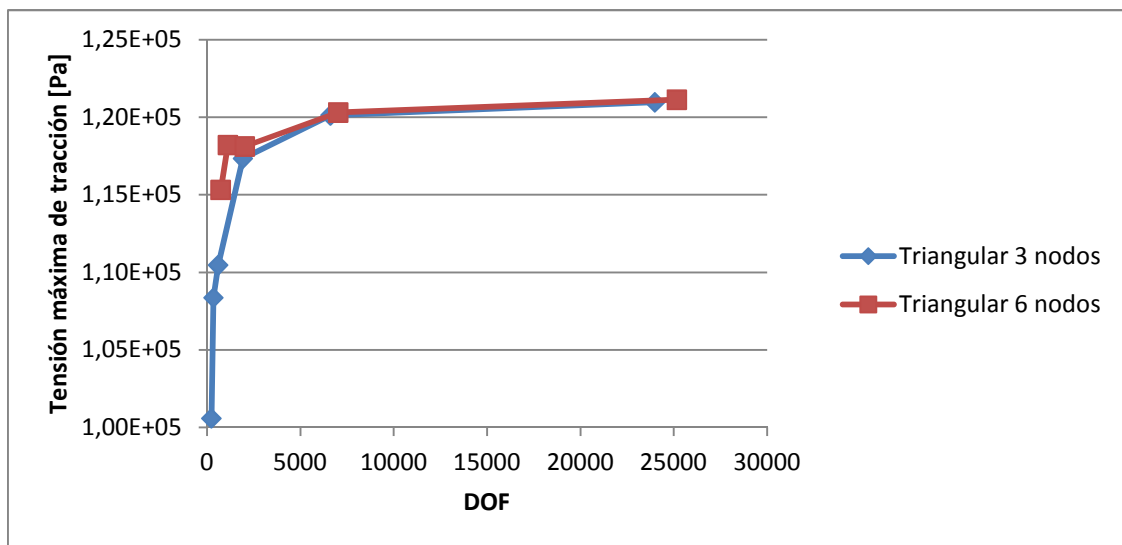
7.3 Gráfico de convergencia de desplazamientos máximos en X



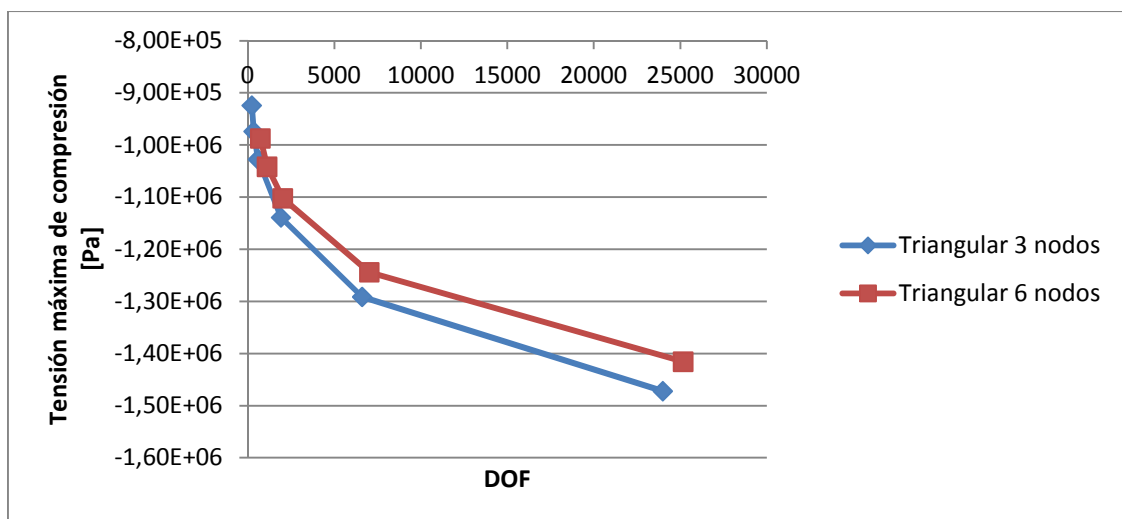
7.4 Gráfico de convergencia de desplazamientos máximos en Y



7.5 Gráfico de convergencia de tensiones máximas de tracción



7.6 Gráfico de convergencia de tensiones máximas de compresión



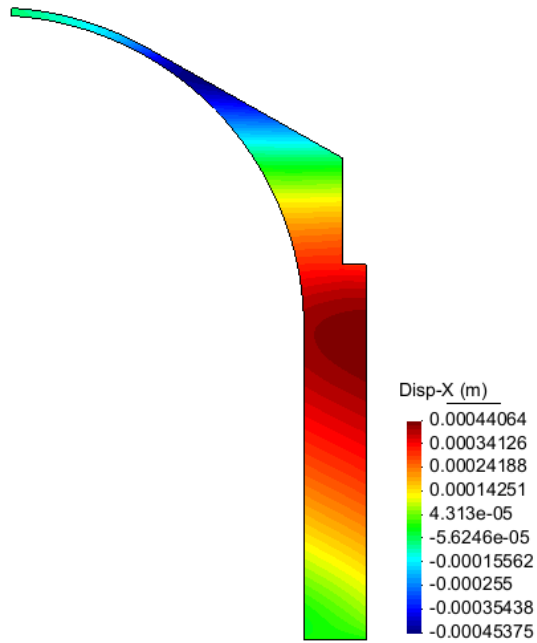
7.7 Conclusiones de convergencia

Se observa que los elementos triangulares cuadráticos (6 nodos) convergen de forma más rápida en casi todos los parámetros de estudio. No obstante, la posibilidad de usar elementos triangulares lineales con errores relativos pequeños respecto a los cuadráticos brinda la oportunidad de aproximar de forma muy aceptable a un coste computacional mucho menor los valores de estudio. Es por esto que, ciertamente, los elementos cuadráticos convergen de forma más rápida, pero su alto coste computacional no compensa la precisión que ofrecen, decidiendo pues, que la mejor opción y la que ha sido implementada son los elementos triangulares lineales. Además, los elementos triangulares lineales, ofrecen la posibilidad de generar mallas más finas, refinando de esta forma la solución.

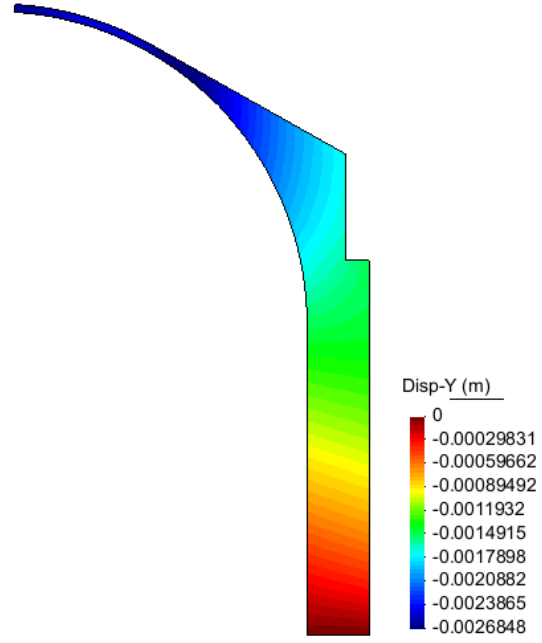
8. RESULTADOS GRÁFICOS

8.1 Resultados modelo 2D

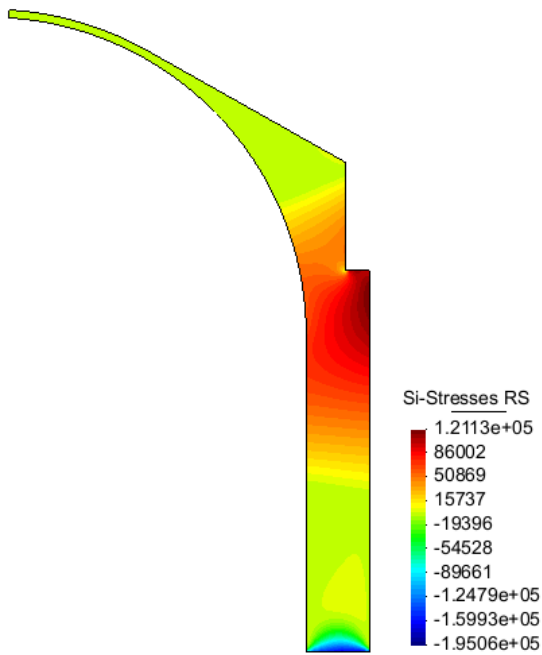
8.1.1 Desplazamientos en X



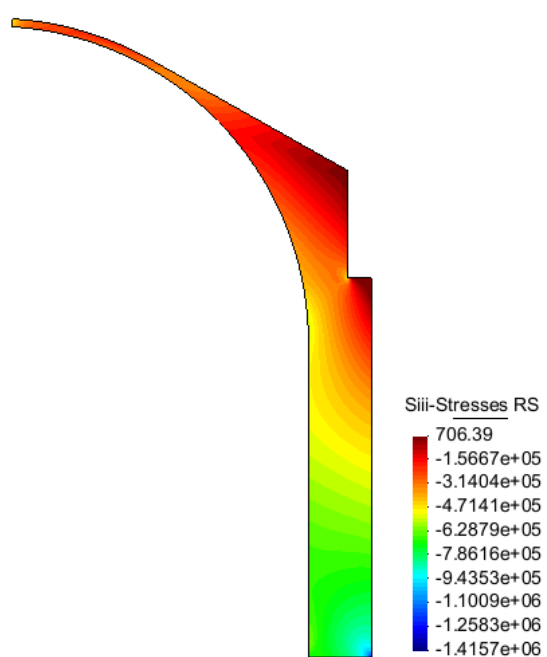
8.1.2 Desplazamientos en Y



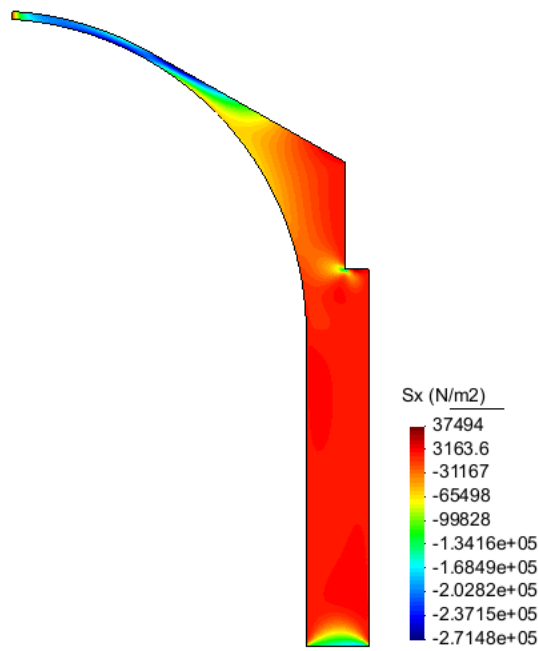
8.1.3 Tensiones principales S_i



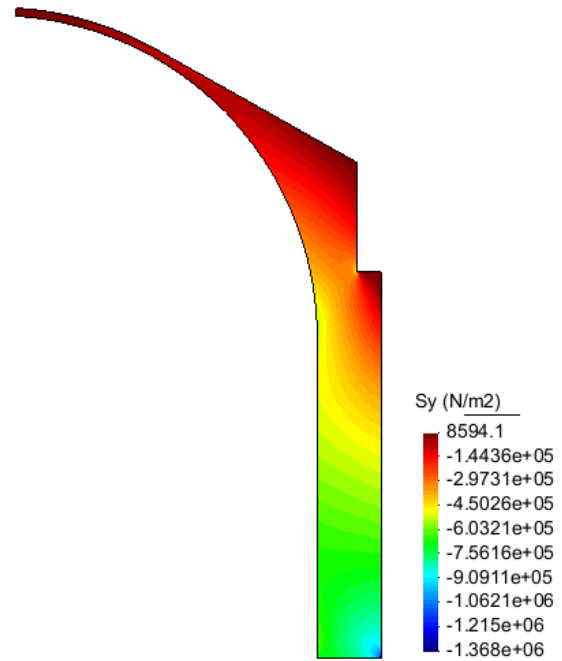
8.1.4 Tensiones principales S_{iii}



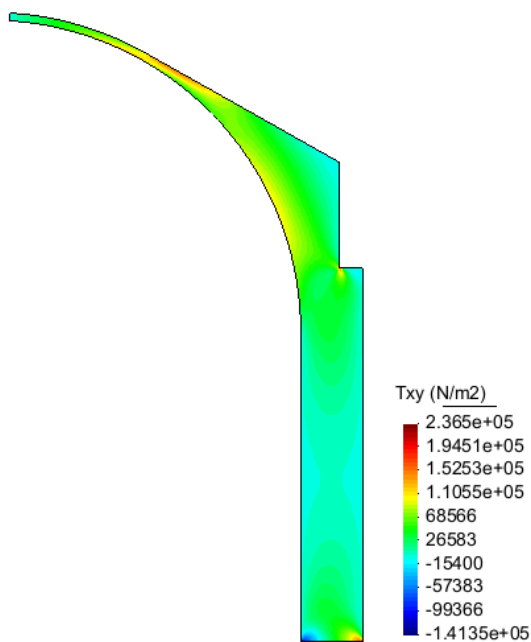
8.1.5 Tensiones principales S_x



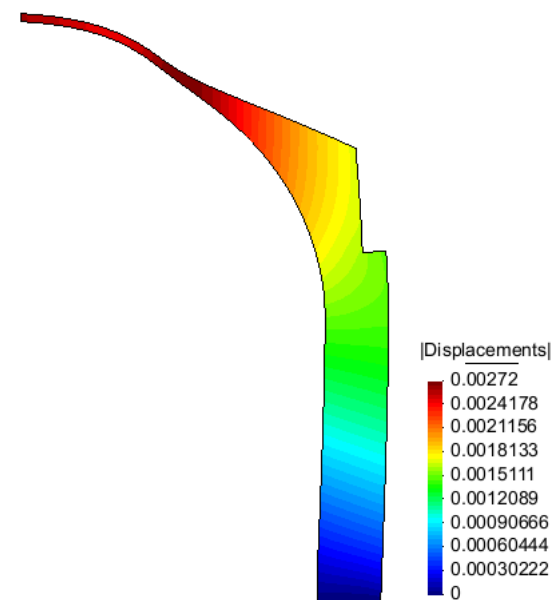
8.1.6 Tensiones principales S_y



8.1.7 Tensiones principales T_{xy}



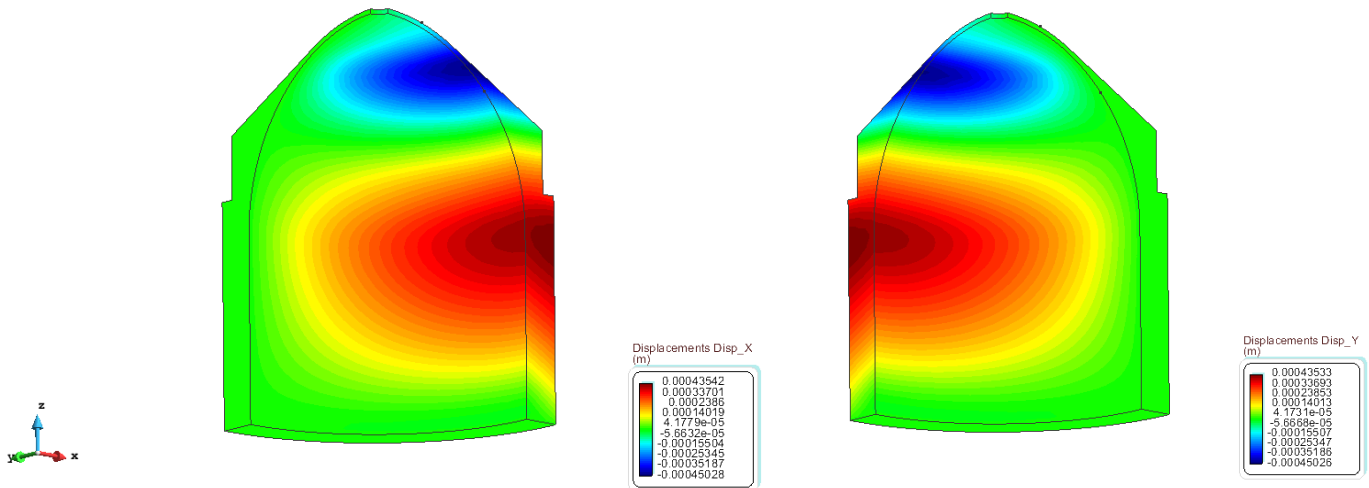
8.1.8 Deformada - (x2350)



8.2 Resultados modelo 3D

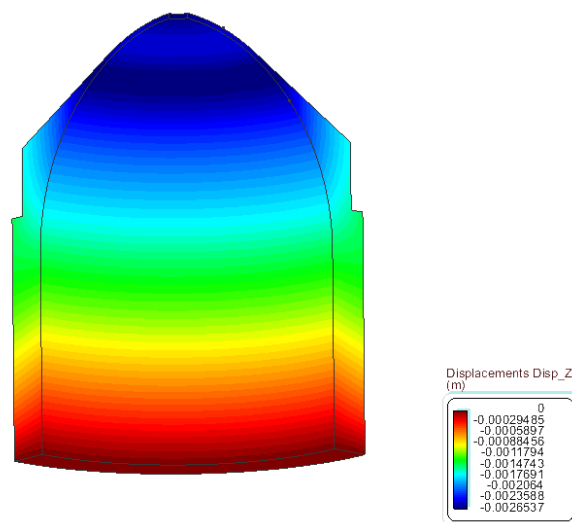
8.2.1 Desplazamientos en X

8.2.2 Desplazamientos en Y



Se aprecia la simetría que existe entre los desplazamientos en dirección x e y. Esto es como cabría esperar debido a la simetría de revolución de la estructura estudiada. Puede también apreciarse los desplazamientos nulos en la sección transversal de corte con vector normal a la dirección de los desplazamientos estudiados debido a las condiciones de contorno impuestas.

8.2.3 Desplazamientos en Z



Se aprecia un desplazamiento nulo en la base debido a las condiciones de contorno y unos desplazamientos máximos verticales que ocurren en la franja media superior de la cúpula. Dichos desplazamientos máximos no se dan en la parte superior debido a que las cargas actuantes del peso propio son menores en esta zona, esto es causa de la existencia de un espesor variable en dirección meridional.

9. CÁLCULO DEL FACTOR DE SEGURIDAD - FS

Con los resultados obtenidos del cálculo y las definiciones de los factores de seguridad de tracción y compresión, es posible proceder a la determinación de estos como se muestra a continuación,

$$FS_C = \frac{\sigma_{resistente\ C}}{\sigma_{max.C}} = \frac{70\ MPa}{1.42\ MPa} = 49.45$$

$$FS_T = \frac{\sigma_{resistente\ T}}{\sigma_{max.T}} = \frac{1.8\ MPa}{0.121\ MPa} = 14.88$$

Por lo tanto, el factor de seguridad de la estructura, será el mínimo entre el FS de compresión y de tracción, ya que el mínimo corresponde a la tensión máxima admisible que se alcanzará antes,

$$FS_{estructura} = \min\{FS_C ; FS_T\} = 14.88$$

En este caso, el factor de seguridad de la estructura es de 14.88, siendo la tensión de tracción crítica para la seguridad e integridad estructural del panteón.

10. CONCLUSIONES

Se ha demostrado que los factores de seguridad de la estructura son ampliamente superiores a los que se requeriría a una estructura moderna. No obstante, estos valores tan altos tienen una explicación, no es otra que cuando esta estructura fue construida no existían apenas técnicas de cálculo de estructuras y estas se realizaban por experiencia del diseñador. Además las técnicas de construcción no permitían optimizar el uso de material y recursos con lo que el resultado final, eran estructuras muy sobredimensionadas con altos factores de seguridad y, por lo observado, una larga vida útil.

Se observa un desplazamiento máximo en valor absoluto del orden de 3 mm, lo cual puede ser asumido como aceptable.

Los valores de las tensiones principales presentan valores muy por debajo del límite admisible para la estructura. Esto confirma la idea de que esta estructura está ampliamente sobredimensionada.

Por último, destacar que la estructura trabaja predominantemente a compresión, como cabría esperar. No obstante, a causa del movimiento en dirección radial al eje de revolución, aparecen tracciones perpendiculares a la sección meridional que son soportadas principalmente por la zona de contacto entre la cúpula y la pared lateral. Las mayores compresiones son resistidas por la zona exterior de la base ya que esta zona

debe soportar el peso propio correspondiente a la estructura más una carga extra que equilibra las fuerzas debidas al movimiento de toda la estructura hacia afuera, generando de esta forma, una carga excéntrica (no uniforme) sobre la base del panteón.

11. ASPECTOS TEÓRICOS DE LOS ELEMENTOS DE SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

El desarrollo de este ejercicio se ha realizado con la formulación para sólidos de revolución. Las hipótesis de este tipo de problema son que el sólido de estudio debe poder ser modelado como la extrusión de revolución de una superficie plana alrededor de un eje de rotación y que tanto cargas como condiciones de contorno deben ser igualmente resultado de una extrusión de revolución, es decir, simétricas respecto a la dirección longitudinal en coordenadas cilíndricas. Si estas últimas condiciones no se cumplieran, podría realizarse el estudio de la estructura igualmente pero con mayores dificultades calculísticas ya que se debería descomponer las fuerzas en series de Fourier.

Este tipo de formulación permite simplificar un problema 3D a 2D, con el ahorro computacional y de dificultad algebraica en su formulación que esto implica. La principal diferencia con los otros tipos de elementos 2D que se han estudiado en el curso, es que tanto los movimientos, deformaciones y tensiones están referenciadas a coordenadas cilíndricas. Esto es así ya que su formulación resulta muy útil cuando existen simetrías de revolución.

11.1 Campo de desplazamientos

En este apartado se presentan los desplazamientos que un sólido de revolución tiene con esta formulación. Al tratarse de una formulación realizada en 2D, los grados de libertad para los desplazamientos son 2, y como ya se ha comentado, estos estarán referenciados a coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(r, z) \\ w(r, z) \end{Bmatrix}$$

Donde r es el radio de giro de cada uno de los puntos, o distancia al eje de rotación, y z es la distancia vertical desde el origen. Cada punto del dominio tendrá pues, dos desplazamientos posibles, u y w que dependerán de sus coordenadas.

11.2 Campo de deformaciones, tensiones y ecuación constitutiva

Si se aplican las fórmulas de las deformaciones al campo de desplazamientos, se obtienen directamente 3 deformaciones $\{\varepsilon_r, \varepsilon_z, \gamma_{rz}\}$. No obstante, estas deformaciones no son todas las deformaciones que sufre un sólido de revolución pues existe una deformación más en dirección normal a la sección de revolución ε_θ . Estas deformaciones tienen la siguiente forma,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{pmatrix}$$

Entonces, las deformaciones existentes son 4, a diferencia de otros elementos en 2D en que sólo existían 3 deformaciones, como sería el caso de elasticidad bidimensional.

La deformación en dirección longitudinal ε_θ , modela la deformación que sufre una sección en dicha dirección a causa de movimientos relativos en dirección r , de hecho, puede observarse, que a mayor distancia del eje de simetría, dichas deformaciones son menores a igualdad de desplazamiento horizontal, este comportamiento puede inducir a la llamada no linealidad geométrica, en que la respuesta de la estructura no es lineal a causa de su geometría ya que las deformaciones depende de forma inversamente proporcional a la posición del punto.

Como es habitual, el campo de tensiones estará directamente relacionado con el campo de deformaciones multiplicándolo por un término de rigidez estructural. Por lo tanto, aparecerán 4 tensiones que se expresan en un vector de tensiones,

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}]^T$$

A causa de su naturaleza, este tipo de estructuras son más sensibles a la generación de tensiones importantes a causa de variaciones de temperatura, de forma que será necesario estudiar el problema termo-mecánico y introducir vectores de deformación y tensión inicial que tengan en cuenta el estado térmico, por lo tanto, la ecuación constitutiva del problema queda de la siguiente forma,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \boldsymbol{\sigma}^0$$

Donde $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ y $\boldsymbol{\sigma}^0$ son los vectores de deformación y tensión iniciales debidos a la variación de temperatura.

11.3 Discretización del campo de movimientos - PTV

En primer lugar, se debe determinar el PTV, que nos servirá para imponer el equilibrio en la estructura. Se deben tener en cuenta las nuevas coordenadas cilíndricas para su formulación, de forma que ,

$$dV = (rd\theta)drdz = rd\theta dA$$

De forma que una de sus dimensiones, la radial, puede ser integrada directamente y reducir así el problema de una integral sobre el volumen (3D) a una integral sobre el área (2D),

$$\iint_A \int_0^{2\pi} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} r d\theta dA = \iint_A \int_0^{2\pi} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} r d\theta dA + \oint_l \int_0^{2\pi} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} r d\theta ds$$

$$2\pi \iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA = 2\pi \iint_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} r dA + 2\pi \oint_l \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} r ds$$

Donde \mathbf{b} y \mathbf{t} son los vectores de fuerzas másicas y de superficie respectivamente.

11.4 Elementos finitos de revolución

Aunque todos la formulación evalúe la estructura en una de sus secciones meridionales, los elementos de revolución son anulares.

Para iniciar la formulación de estos elementos se requiere el vector de desplazamientos nodales que se define como,

$$\mathbf{u} = [u, w]^T$$

La aproximación de este vector se realiza con funciones de forma que toman el valor 1 en el nodo de estudio y 0 en los otros nodos. Así pues, podemos aproximarlos como,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)}$$

Donde \mathbf{N} son las funciones de forma asociadas a cada nodo de la discretización y a el vector de desplazamientos de cada nodo $\mathbf{a}_i = [u_i, w_i]^T$. Directamente aplicando las fórmulas para la obtención de las deformaciones que se han presentado en el apartado 12.2 se pueden obtener estas como aproximación mediante las funciones de forma,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{a}$$

Donde \mathbf{B} es una matriz $4n \times 2n$ que deriva convenientemente las funciones de forma para obtener la expresión de las deformaciones generalizadas.

11.5 Obtención matriz de rigidez

Finalmente, aplicando el vector de movimiento y de deformaciones aproximados mediante funciones de forma al PTV, se obtiene la siguiente expresión,

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}$$

Donde $\mathbf{K}^{(e)}$ es la matriz de rigidez, y puede ser expresada como,

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j r \, dr dz$$