

Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona.
Universitat Politècnica de Catalunya.

PROBLEMA L-56

Ingeniería de estructuras

Clara Puy Rodellar



Curso 2014-15

Contenido

1. OBJETIVO DE LA PRÁCTICA.....	3
2. DIMENSIONAMIENTO. HIPÓTESIS INICIAL	3
3. ANÁLISIS DEL PROBLEMA.....	4
3.1 ASPECTOS TEÓRICOS.....	4
3.2 PRE-PROCESO	5
3.3 POST-PROCESO.....	9
4. CONCLUSIONES	20

1. OBJETIVO DE LA PRÁCTICA

El objetivo de este trabajo es determinar el valor máximo de carga uniformemente repartida que soporta una placa de hormigón armado como la de la Figura 1 y con las condiciones de apoyo indicadas.

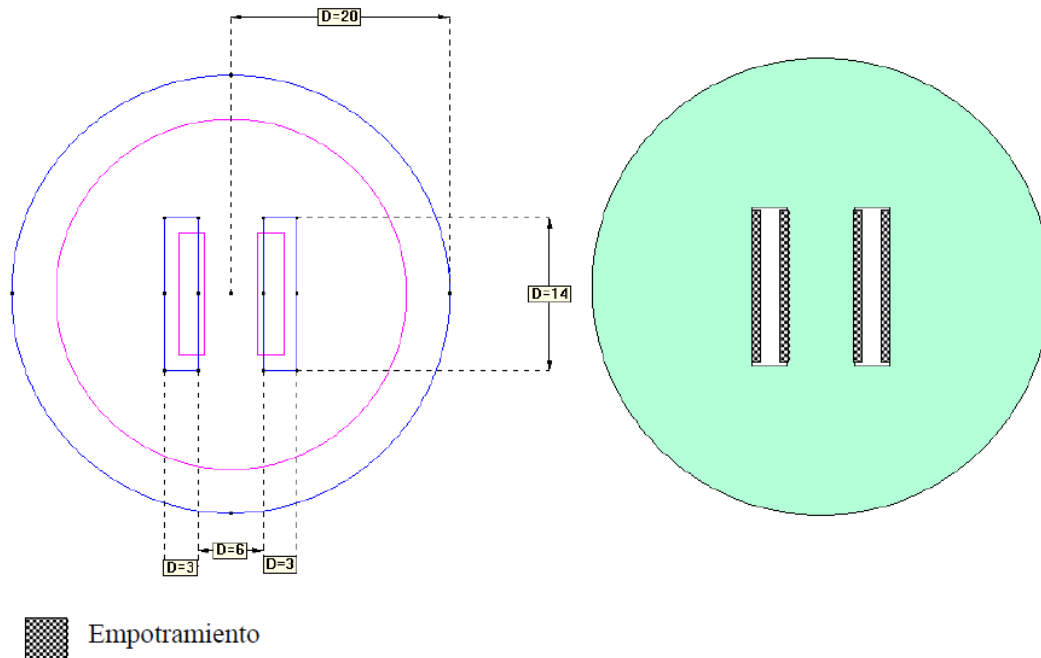


Figura 1. Características geométricas y condiciones de contorno de la placa de estudio.

Las dimensiones representadas en la anterior figura son en metros. Otras características de la placa son:

- Espesor de 0,35 metros
- Módulo de elasticidad E igual a 30 GPa
- Coeficiente de Poisson de 0,2

El valor de la carga buscada debe satisfacer las siguientes restricciones:

- a. Las tracciones máximas en cualquier punto no deben superar los 20 MPa.
- b. Las compresiones máximas en cualquier punto no deben ser superiores a 12 MPa.

Se consideran dos casos de estudio:

1. Peso propio
2. Peso propio + carga uniforme

2. DIMENSIONAMIENTO. HIPÓTESIS INICIAL

La incógnita del presente ejercicio es, como se ha dicho, la carga máxima que soporta la placa de estudio, cumpliendo las restricciones expuestas. Así, como hipótesis inicial, se considera una carga uniformemente distribuida en toda la superficie de la placa de valor 5 KN/m^2 .

3. ANÁLISIS DEL PROBLEMA

3.1 ASPECTOS TEÓRICOS

El problema puede solucionarse utilizando la teoría de placas del análisis de estructuras. Esta teoría indica que, según la relación entre el espesor y el ancho de las placas, es decir, su esbeltez, será más conveniente utilizar la teoría de placas de Kirchoff o la teoría de placas de Reissner-Mindlin.

Las relaciones que indican qué teoría es más adecuada para realizar el análisis de la placa es:

- Placas delgadas: $espesor/ancho \leq 0,10 \rightarrow$ Teoría de placas de Kirchoff
- Placas medias y gruesas: $espesor/ancho > 0,10 \rightarrow$ Teoría de placas de Reissner – Mindlin

El caso que acontece, al tener coeficiente de esbeltez menor que 0,1, se trata de una placa delgada. Es por ello que, aunque se puede utilizar tanto la teoría de Reissner-Mindlin como la de Kirchoff, se decide utilizar esta última, ya que es más adecuada para este tipo de problema.

Las hipótesis de la teoría de Kirchoff son las siguientes:

1. Los puntos del plano medio sólo se mueven verticalmente ($u=v=0$).
2. Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen aproximadamente el mismo desplazamiento vertical.
3. La tensión normal σ_z es despreciable.
4. Los puntos de la normal que antes de la deformación estaban sobre la normal al plano medio de la placa, y permanecen sobre una misma recta también ortogonal a la deformada después de la deformación.

Los desplazamientos de la placa se producirán en las tres direcciones siguiendo las siguientes formulaciones:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &\cong w(x, y) \end{aligned} \right\} \bar{u} = [w, \theta_x, \theta_y]^T$$

Donde los giros, obtenidos por la 4ª hipótesis, son:

$$\theta_x(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\theta_y(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Las deformaciones generalizadas que se obtienen de estos desplazamientos son:

$$\hat{\varepsilon}_f = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T$$

Las tensiones generalizadas derivadas de esta teoría son:

$$\widehat{\sigma}_f = [M_x, M_y, M_{xy}]^T = \widehat{D}_f \widehat{\varepsilon}_f$$

El Principio de los Trabajos Virtuales, siguiendo esta formulación, queda de la siguiente manera:

$$\iint_A \delta \widehat{\varepsilon}_f^T \widehat{\sigma}_f dA = \iint_A \delta u q dA + \sum_{i=1}^n \delta \bar{u}_i \mathbf{p}_i$$

3.2 PRE-PROCESO

El primer paso en la resolución de un problema por el método de elementos finitos en un software como GiD es la definición de la geometría, cuyas características han sido previamente indicadas. Seguidamente, se definen los materiales y se aplican las condiciones de contorno y cargas. Tras ello, se realiza la discretización en una malla de elementos finitos, elementos cuyo tipo de determina llevando a cabo un análisis de convergencia de resultados.

A continuación, se ahonda en los aspectos comentados, los cuales caracterizan el pre-proceso.

Geometría

Se empieza definiendo la geometría de la sección transversal de la presa, con los parámetros definidos anteriormente, resultando la siguiente configuración:

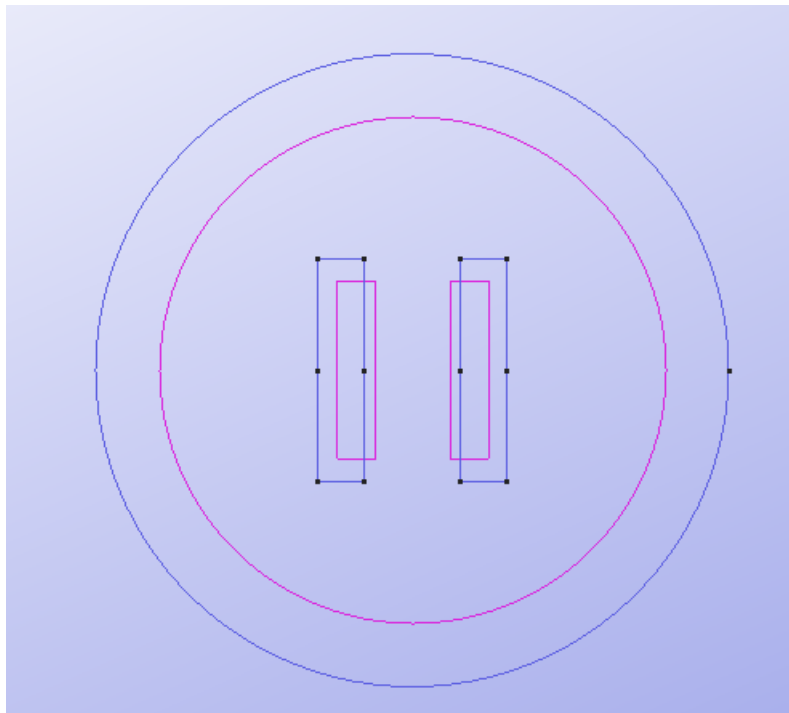


Figura 1. Visualización de la geometría de la placa de estudio en GiD.

Condiciones de contorno

La condición de contorno dada por el enunciado es el empotramiento de las laterales de mayores dimensiones de los agujeros de la placa, es decir, se restringe el movimiento en dirección "x" e "y" así como el giro alrededor del eje "z" (xx). En la siguiente figura puede verse la implementación de estas condiciones de contorno en GiD.

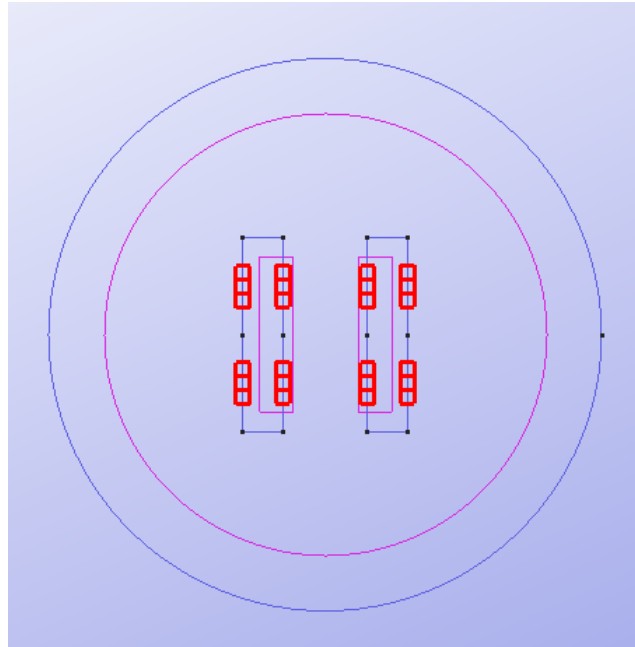


Figura 2. Visualización en GiD de las condiciones de contorno del problema.

Materiales

Se definen las características materiales de la placa, es decir, el espesor de la misma, así como el módulo de elasticidad, el coeficiente de Poisson y el peso específico del hormigón. Se ha utilizado los valores usados por el GiD por defecto, que son los típicos de este material.

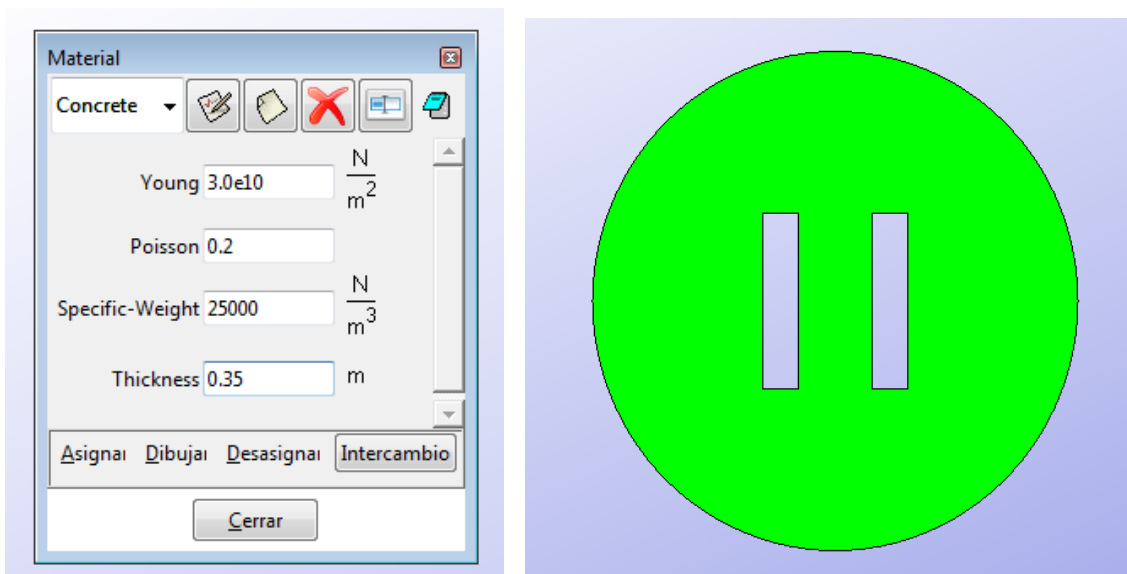


Figura 3. Características materiales de la placa de estudio.

Cargas

Como ya se ha comentado, la carga a la que estará sometida la placa es la incógnita del problema. Así, se prueba con una hipótesis inicial de 5 KN/m^2 como valor de la carga uniformemente distribuida y, en función de los resultados de tensiones de tracción y compresión obtenidos, comparándolos con las restricciones impuestas, se seguirá iterando hasta dar con la solución, es decir, con el valor máximo de carga que cumpla con dichas restricciones.

Tipo de problema

Para la implementación en GiD se ha utilizado la opción de *Plates* la aplicación *RamSeries_2D*.

Mallado

Para llevar a cabo la discretización del problema en una malla de elementos finitos, se realiza un análisis de convergencia de resultados, con el objetivo de determinar qué tipo de elemento es más conveniente utilizar así como el refinamiento de malla más óptimo, el cual proporcione resultados suficientemente exactos sin un coste computacional desproporcionado.

Para ello, se tiene en cuenta la mejor adaptación de los elementos triangulares a una geometría circular, como es el caso. Así, se descarta el uso de elementos cuadriláteros. Por otra parte, tal y como ya se ha comentado, se considera el factor tipo de placa, es decir, al tratarse de una placa delgada, adoptando la teoría de Kirchoff, se decide utilizar elementos de malla triangulares normales (de 3 nodos por elemento), ya que los cuadráticos reflejan la teoría de Reissner-Mindlin, la cual es idónea para placas gruesas.

ANÁLISIS DE CONVERGENCIA

En la siguiente tabla se muestran los resultados de desplazamientos verticales máximos obtenidos para diferentes tamaños de malla de elementos triangulares de 3 nodos. De un modo más visual, se representan estos valores en la gráfica contigua, demostrándose la convergencia de resultados.

Este análisis de convergencia se realiza para el caso en el que sólo actúa la carga de peso propio, utilizando el segundo caso de estudio, es decir, en el que además actúa la carga uniforme, para el estudio con el que se determinará el valor de dicha carga.

Caso 1: Peso Propio

- Elementos triangulares DKT de 3 nodos:

H _{elemento} (m)	Nº Nodos	Nº grados de libertad	U _{z,máx} positivo (m)	U _{z,máx} negativo (m)
1	7067	14134	0,0022482	-0,20501
0,8	7567	15134	0,0022482	-0,20519
0,5	10155	20310	0,002378	-0,20496
0,4	12793	25586	0,0022375	-0,20466
0,3	18571	37142	0,0022375	-0,20465

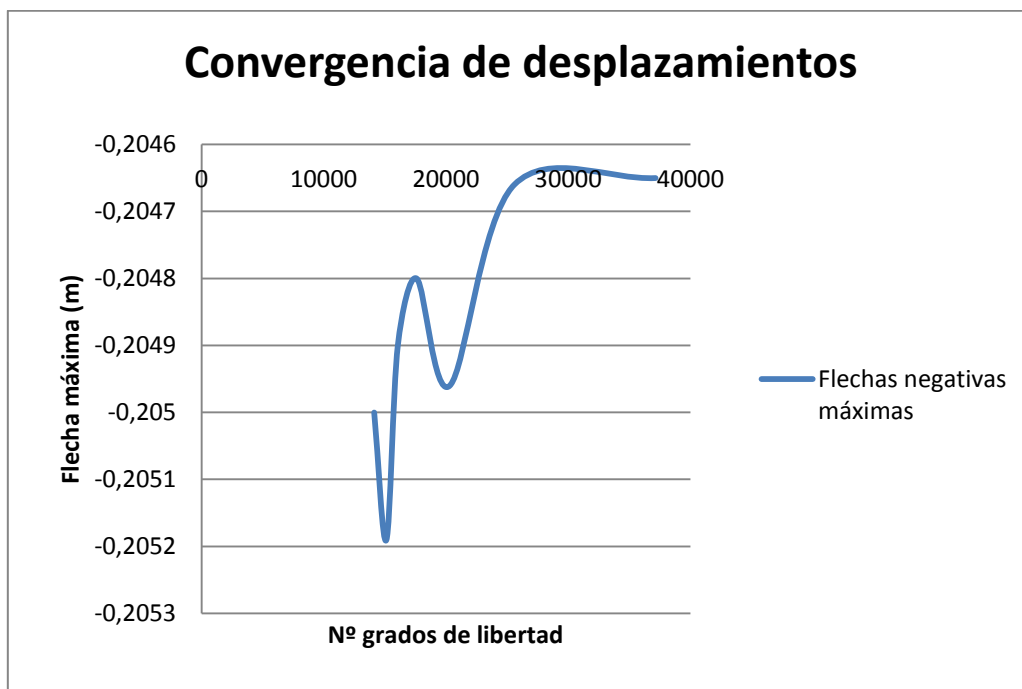
Tabla 1. Desplazamientos máximos verticales en coronación utilizando elementos triangulares de 3 nodos para el caso de cargas 1 (PP).

Cabe destacar que el tamaño del elemento reflejado en la tabla es el utilizado para toda la superficie de la placa a excepción de las líneas de contorno, tanto exteriores como interiores, susceptibles éstas últimas de generar concentración de tensiones ficticias. Sin embargo, el tamaño de malla adoptado para estos contornos es de 0,1 metros.

Se observa que la flecha máxima, tanto positiva como negativa, tiende hacia un mismo valor. Representando los valores obtenidos según los grados de libertad de la estructura, se obtiene el siguiente gráfico:



Gráfica 1. Convergencia de desplazamientos verticales positivos máximos para diferentes tamaños de malla para el caso de cargas 1 (considerando sólo peso propio).



Gráfica 2. Convergencia de desplazamientos verticales negativos máximos para diferentes tamaños de malla para el caso de cargas 1 (considerando sólo peso propio).

A la vista de los resultados, se decide escoger el mayor tamaño de malla para el que se asegura convergencia, de cara a minimizar el coste computacional. Así, se opta por realizar la discretización del problema por elementos finitos triangulares DKT, de 3 nodos, con un tamaño de 0,4 metros. A continuación se muestra la malla utilizada.

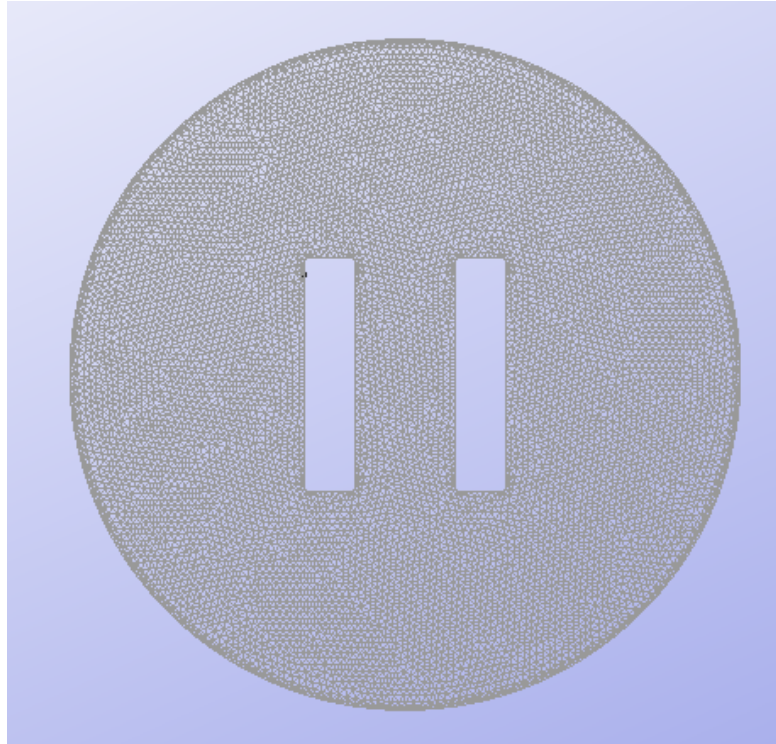


Figura 4. Malla de cálculo utilizada para el análisis del problema por MEF en GiD.

3.3 POST-PROCESO

Tras la elección del tipo y tamaño de elementos a usar, se procede a calcular y visionar el post-proceso, pudiendo extraer conclusiones de los resultados obtenidos.

Como no se tiene un valor de referencia para la carga uniforme que genera una tensión de tracción máxima de 20 MPa y una de compresión máxima de 12 MPa, se toma como hipótesis inicial, tal y como se ha mencionado con anterioridad, una carga uniforme de:

$$P = 5000 \text{ N/m}^2$$

Así, se analizan las tensiones máximas de tracción y compresión, obteniendo los resultados que se adjuntan a continuación.

Cabe comentar que, debido a la experiencia adquirida con ejercicios anteriores, se esperan concentración de tensiones en los contornos angulosos, como es el caso de las esquinas de los agujeros existentes en el interior de la placa, comportamiento comprobado tras el primer análisis. Es por ello que se ha decidido suavizar sutilmente dichas esquinas, con el objetivo de evitar concentraciones de tensiones ficticias sin modificar apenas la geometría real.

➤ Tensiones de tracción:

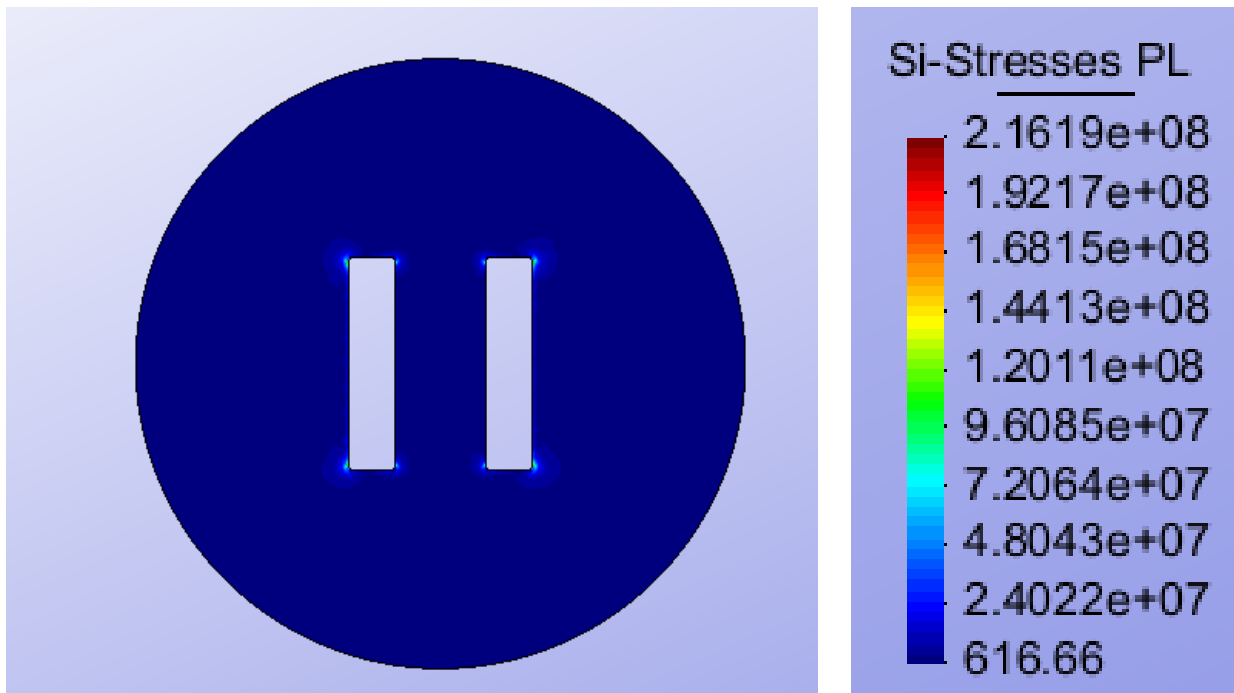


Figura 5. Tensiones principales σ_1 producidas en la estructura para el caso de cargas 2 (PP+carga uniforme de valor 5 KN/m²).

Se adjunta a continuación un zoom de las tensiones obtenidas, para visualizar la concentración de tensiones existente.

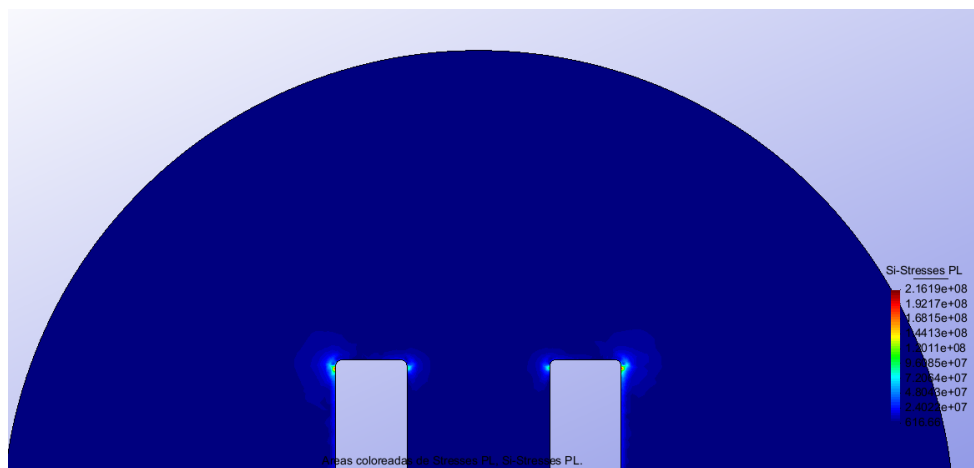


Figura 6. Tensiones principales σ_1 producidas en la estructura para el caso de cargas 2 (PP+carga uniforme de valor 5 KN/m²).ZOOM.

Como puede observarse, y tal y como se esperaba, se produce concentración de tensiones en los contorno angulosos de la placa. Para determinar si se trata de tensiones reales o ficticias, se analiza si sólo se producen en puntos concretos o, por el contrario, en zonas del dominio.

A simple vista, se observa que sólo se producen en puntos determinados, lo cual se comprueba en el siguiente análisis.

Haciendo uso de herramientas que proporciona GiD, gracias a las cuales se pueden extraer gráficas como la que se muestra, se analizan las tensiones principales σ_1 de un segmento de la placa, caracterizado por tener su extremo inicial en el punto de concentración de tensión máxima de tracción.

De esta manera, exportando los resultados a una hoja de Excel, se puede llevar a cabo el proceso de eliminación de datos ficticios. Y es que, tal y como puede observarse, a partir de un cierto punto las tensiones se disparan, crecen drásticamente. Estos resultados no se consideran en el análisis del problema, ya que no son reales.

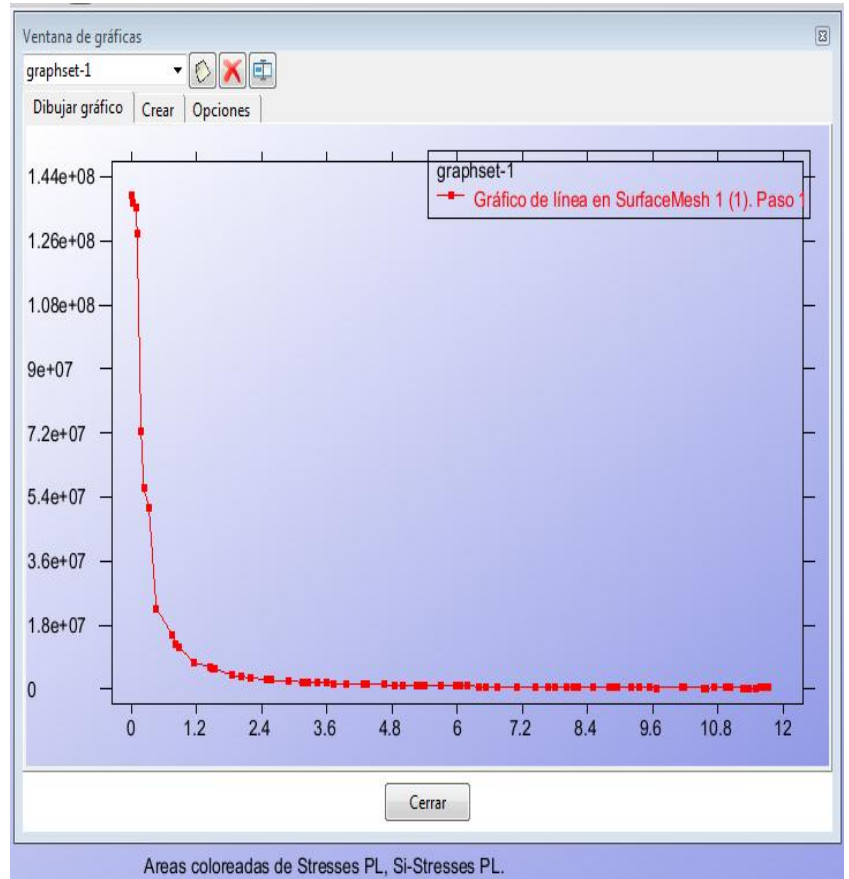
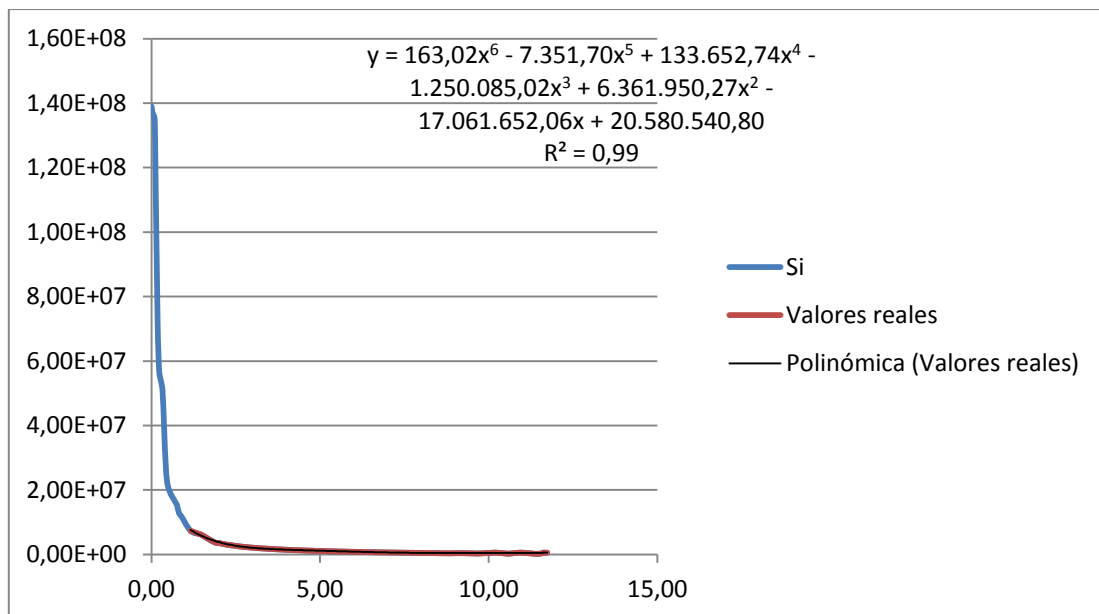


Figura 7. Gráfico extraído de GiD de las tensiones σ_1 de un segmento de la placa.

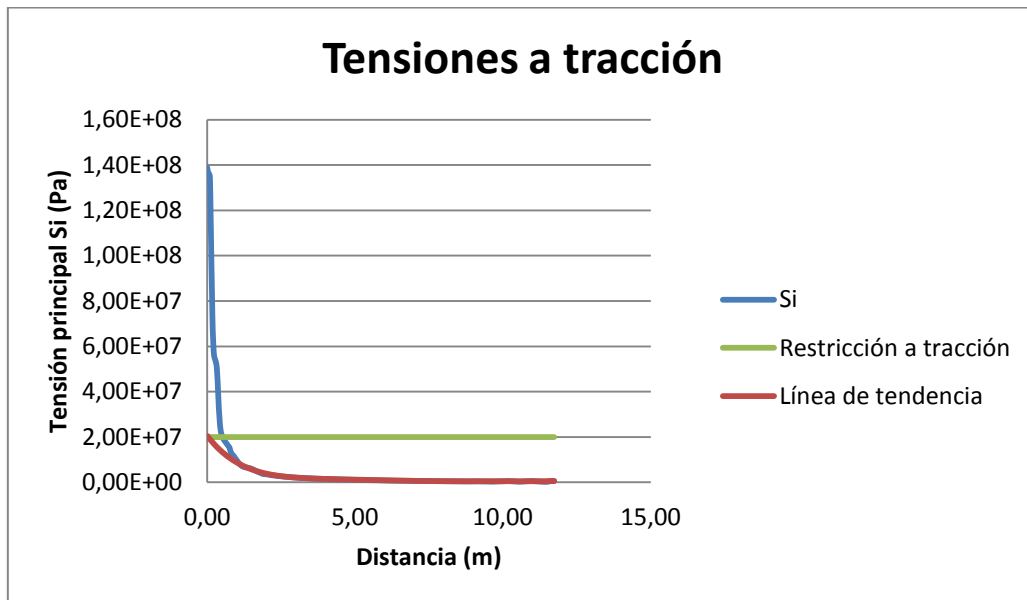
En la siguiente gráfica, se reflejan los resultados de tensiones principales σ_1 obtenidos y mostrados en la anterior figura, así como se indica el tramo de valores reales y la aproximación polinómica de sexto orden que se realiza, con el objetivo de calcular la línea de tendencia.



Gráfica 3. Valores reales y ficticios de las tensiones σ_1 de un segmento de la placa y ecuación de la aproximación polinómica.

Con la ecuación de la línea de tendencia, reflejada en la gráfica anterior en color rojo, se pueden conocer los valores reales (aproximados) del segmento estudiado. Dado que, como se ha dicho, este segmento tiene su inicio en el punto de máxima tensión, sustituyendo por 0 la incógnita x de la ecuación, se obtiene la máxima tracción soportada por la placa.

En la siguiente gráfica se muestra lo comentado, así como la restricción de tensiones de tracción impuesta por el enunciado.



Gráfica 4. Valores reales de las tensiones σ_1 de un segmento de la placa y la restricción a tracción.

Como puede concluirse de la gráfica y de la ecuación indicada en la Gráfica 3, no se cumple la restricción de tracción máxima a tracción, de 20 MPa, aunque no en exceso (20,58 MPa).

➤ Tensiones de compresión:

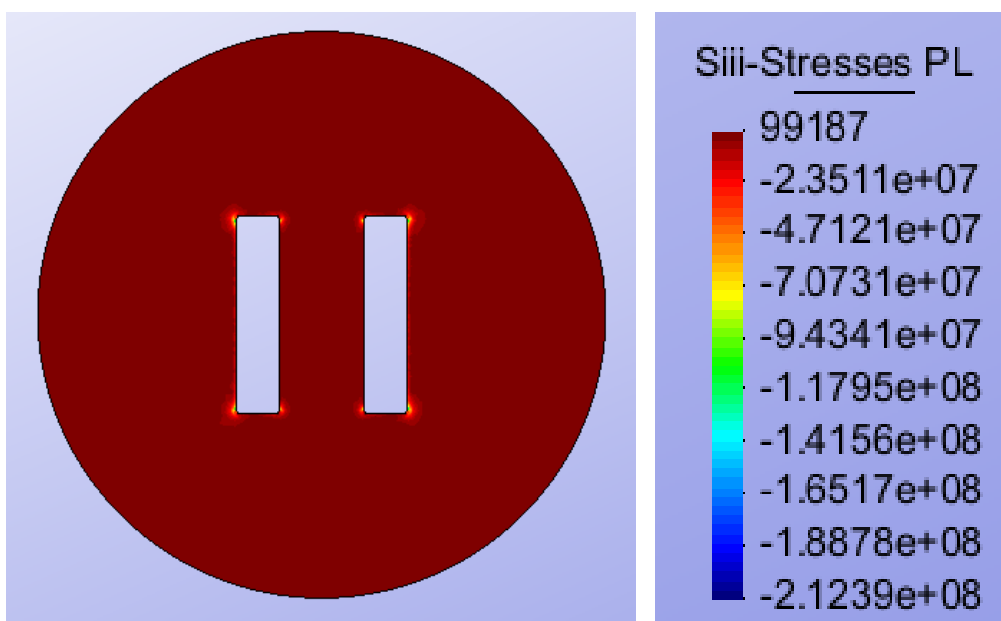


Figura 8. Tensiones principales σ_3 producidas en la estructura para el caso de cargas 2 (PP+carga uniforme de valor 5 KN/m²).

Se adjunta a continuación un zoom de las tensiones obtenidas, para visualizar la concentración de tensiones existente.

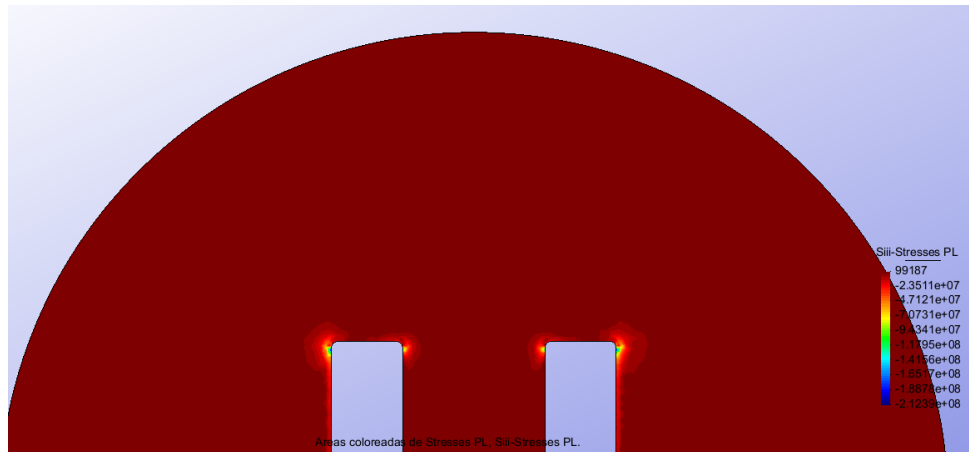


Figura 9. Tensiones principales σ_1 producidas en la estructura para el caso de cargas 2 (PP+carga uniforme de valor 5 KN/m²).ZOOM.

Como puede observarse, y tal y como se esperaba, se produce concentración de tensiones en los contorno angulosos de la placa. Para determinar si se trata de tensiones reales o ficticias, se analiza si sólo se producen en puntos concretos o, por el contrario, en zonas del dominio.

A simple vista, se observa que sólo se producen en puntos determinados, lo cual se comprueba en el siguiente análisis.

Se procede del mismo modo que anteriormente, para las tensiones de tracción, obteniéndose el gráfico de GiD que se adjunta a continuación.

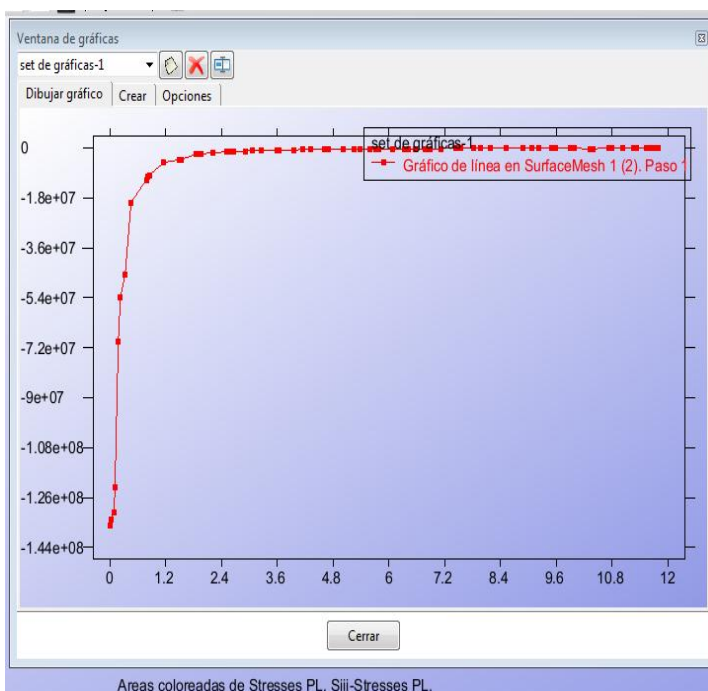
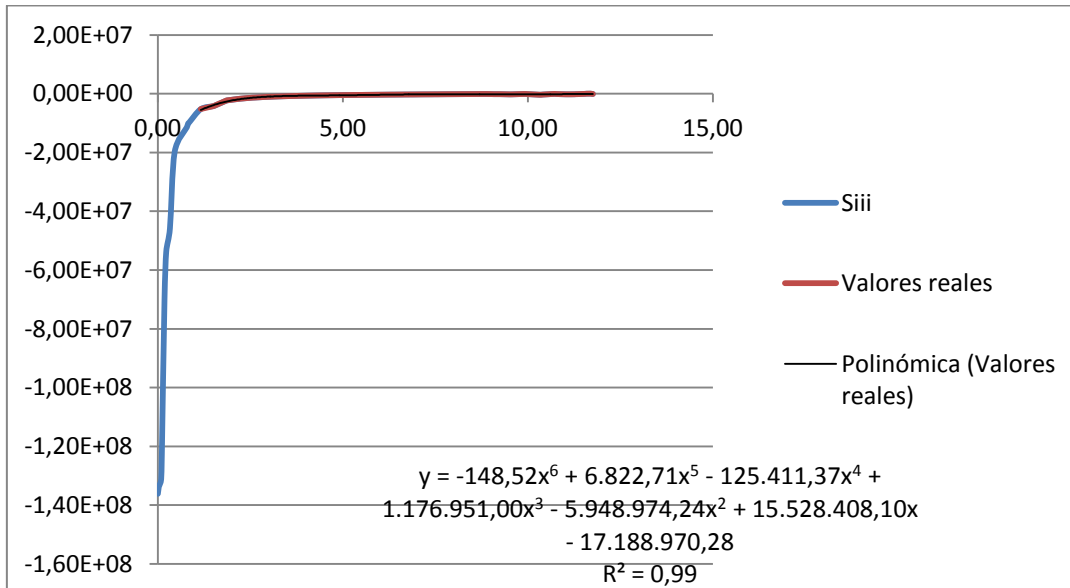


Figura 10. Gráfico extraído de GiD de las tensiones σ_1 de un segmento de la placa.

Esta vez, se analizan las tensiones principales σ_3 de un segmento de la placa, caracterizado por tener su extremo inicial en el punto de concentración de tensión máxima de tracción.

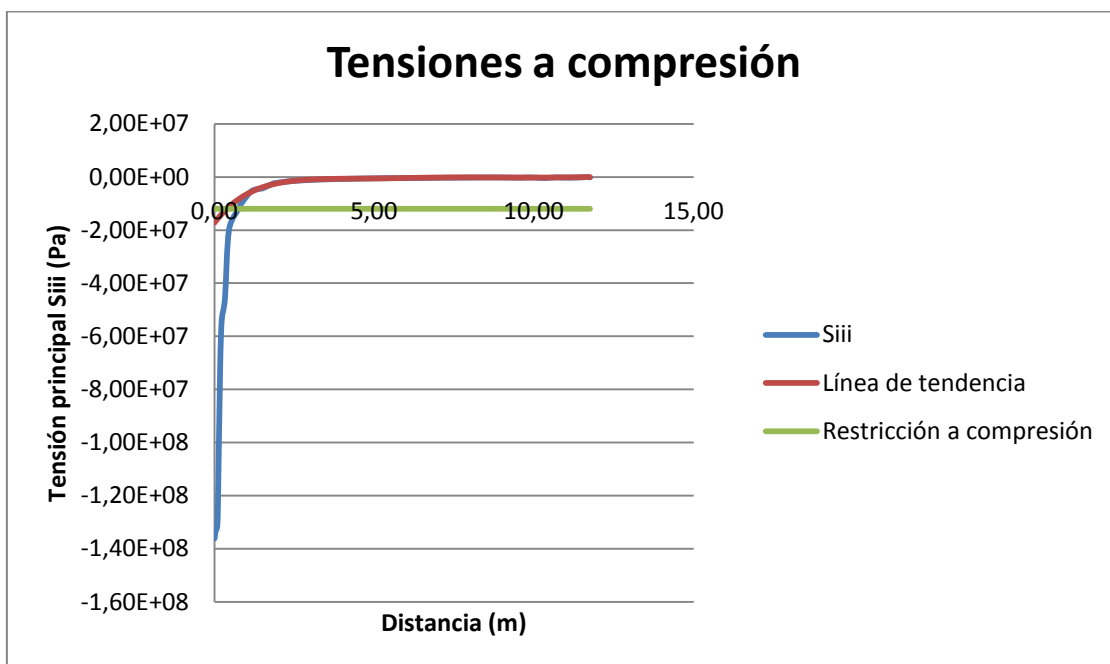
De esta manera, exportando los resultados a una hoja de Excel, se puede llevar a cabo el proceso de eliminación de datos ficticios. Y es que, tal y como puede observarse, a partir de un cierto punto las tensiones se disparan, crecen drásticamente. Estos resultados no se consideran en el análisis del problema, ya que no son reales.

En la siguiente gráfica, se reflejan los resultados de tensiones principales σ_3 obtenidos y mostrados en la anterior figura, así como se indica el tramo de valores reales y la aproximación polinómica de sexto orden que se realiza, con el objetivo de calcular la línea de tendencia lo más aproximada posible a la realidad.



Gráfica 5. Valores reales y ficticios de las tensiones σ_3 de un segmento de la placa y ecuación de la aproximación polinómica.

Con la ecuación de la línea de tendencia, reflejada en la gráfica anterior en color rojo, se pueden conocer los valores reales (aproximados) de las tensiones máximas de compresión del segmento estudiado. Dado que, como se ha dicho, este segmento tiene su inicio en el punto de máxima tensión, sustituyendo por 0 la incógnita x de la ecuación, se obtiene la máxima tracción soportada por la placa. En la siguiente gráfica se muestra lo comentado, así como la restricción de tensiones de tracción impuesta por el enunciado.



Gráfica 6. Valores reales de las tensiones σ_3 de un segmento de la placa y la restricción a compresión.

Como se demuestra, las tensiones reales a compresión generadas en la placa debido a la acción de las cargas de peso propio y distribuida uniformemente de valor 5 KN/m^2 superan la restricción de -12 MPa . Se obtiene un valor máximo de tensión de compresión igual a $-17,2 \text{ MPa}$.

Del análisis inicial, se puede concluir que las tensiones de compresión son las más restrictivas, pues están más lejos de cumplir con la limitación. Por ello, éstas son las que determinarán el dimensionamiento.

A partir de este punto, se prueba iterativamente para diferentes cargas distribuidas, en las que se procede del mismo modo, obteniendo los resultados que se muestran a continuación de tensiones máximas de compresión en la placa. Se estudian sólo las compresiones, pues como se ha comentado, son las que determinarán la carga máxima soportada.

Valor de la carga	Tensión de compresión máxima	
	N/m2	MPa
4500	-16960376	-16,9604
3000	-13929565	-13,9300
2000	-12348914	-12,3490
1500	-11732695	-11,7327

Tabla 2. Compresiones máximas de la placa bajo condiciones de carga uniforme de diferentes valores.

Como se refleja, para un valor de carga igual a $1,5 \text{ KN/m}^2$ se cumple la restricción a compresión y, por tanto, se espera que la de tracción también se verifique. Aún así, se realiza el análisis completo, obteniendo los resultados que se muestran seguidamente en forma de gráficos e imágenes. Se sigue el mismo procedimiento que el expuesto con anterioridad.

➤ Tensiones de tracción:

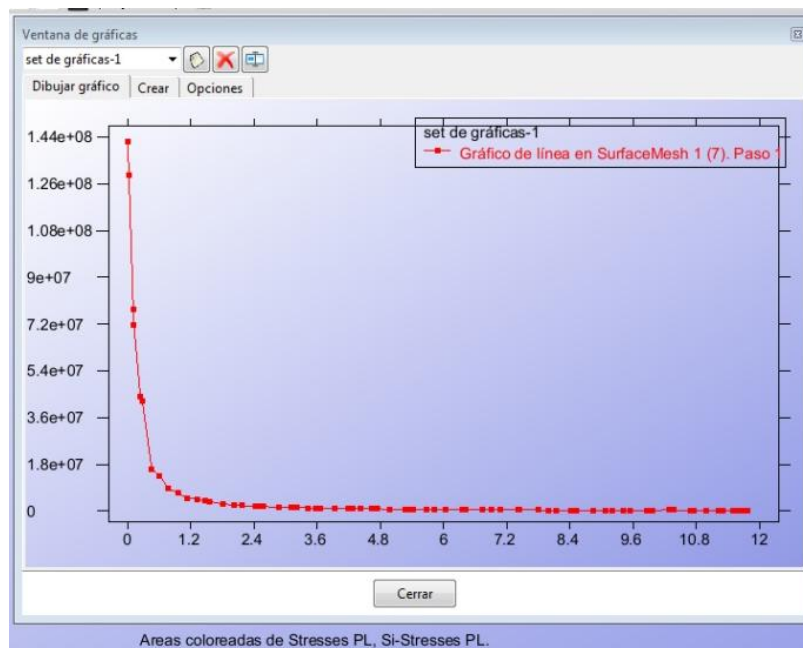
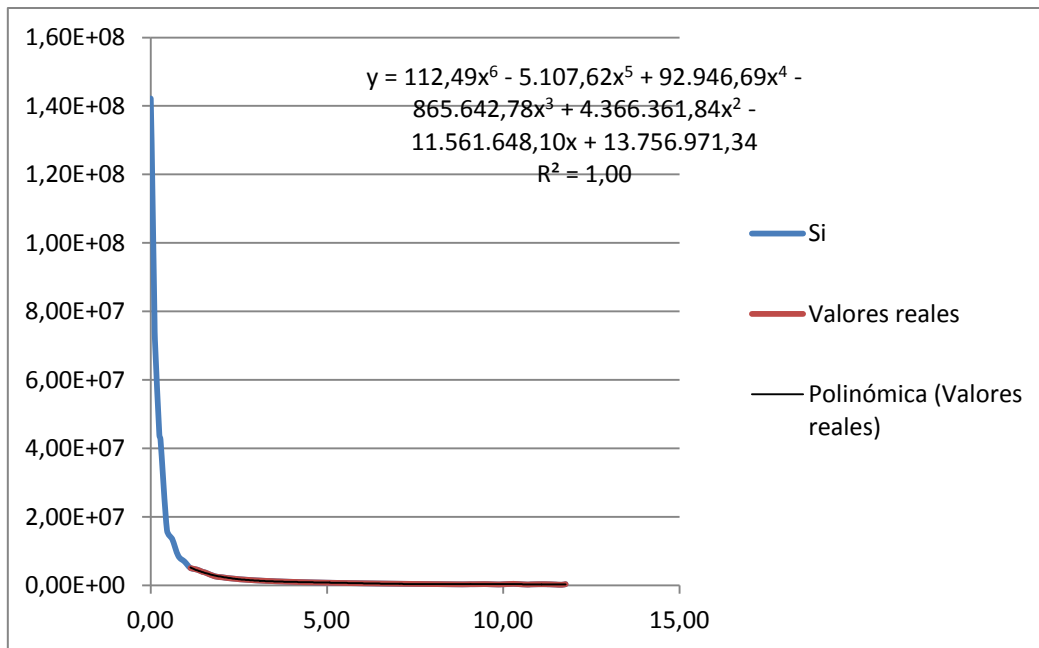
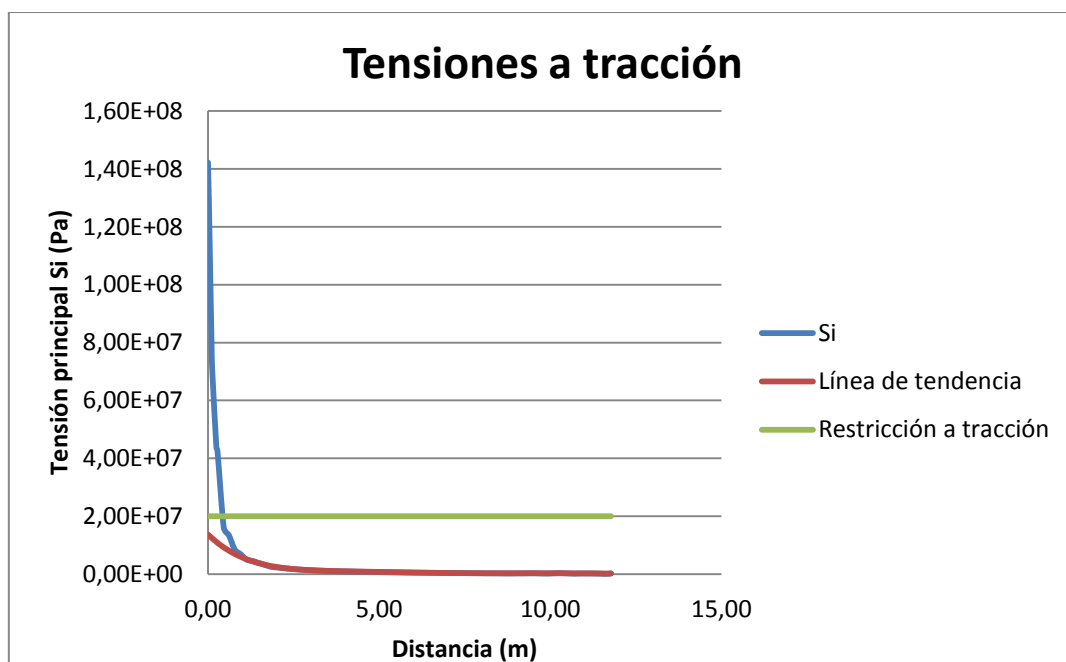


Figura 11. Gráfico extraído de GiD de las tensiones σ_1 de un segmento de la placa sometida a una carga uniformemente repartida de valor 1500 N/m^2 .



Gráfica 7. Valores reales y ficticios de las tensiones σ_1 de un segmento de la placa y ecuación de la aproximación polinómica.



Gráfica 8. Valores reales de las tensiones σ_1 de un segmento de la placa y la restricción a compresión.

Como puede comprobarse, la máxima tensión de tracción soportada por la placa de estudio sometida a la acción de su peso propio y de una carga uniformemente distribuida sobre su superficie de valor $1,5 \text{ KN/m}^2$ es $13,7570 \text{ MPa}$. Por tanto, se concluye que entra dentro de los límites establecidos, pues es inferior a la restricción tensión de tracción máxima de 20 MPa .

➤ Tensiones de compresión:

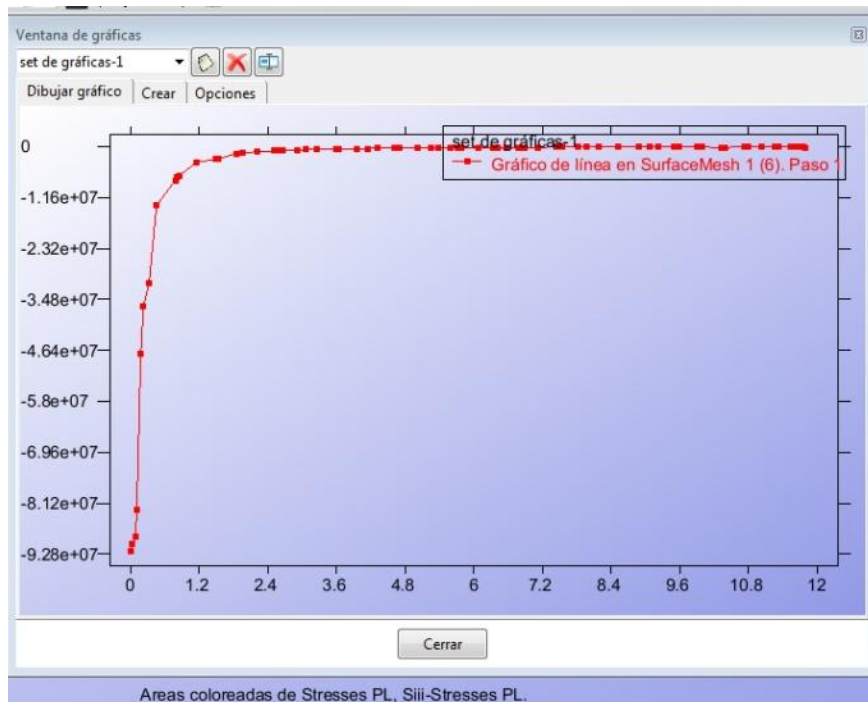
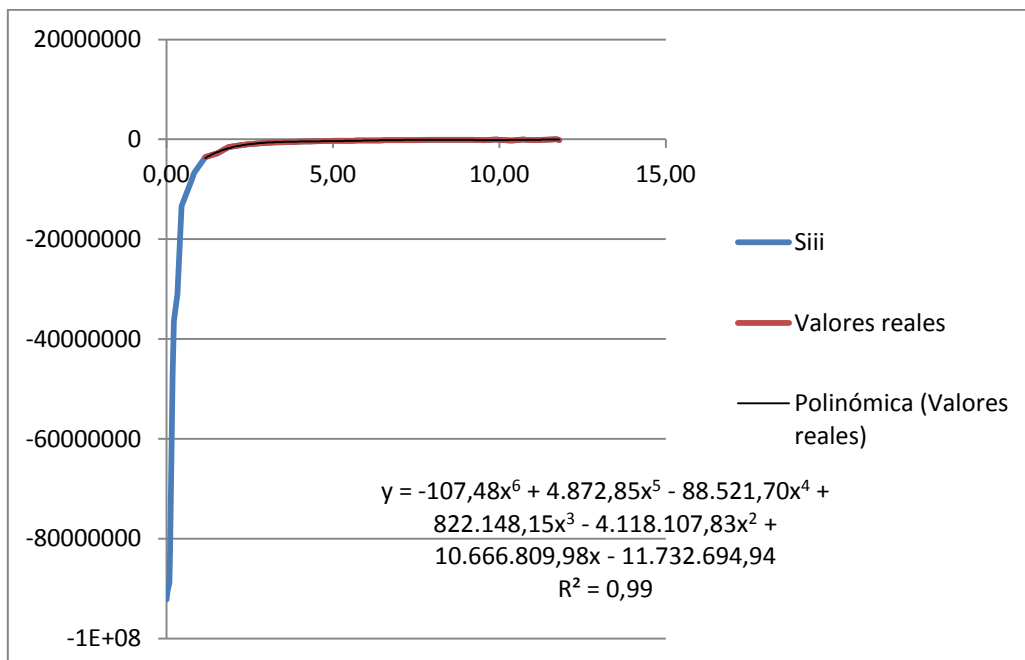
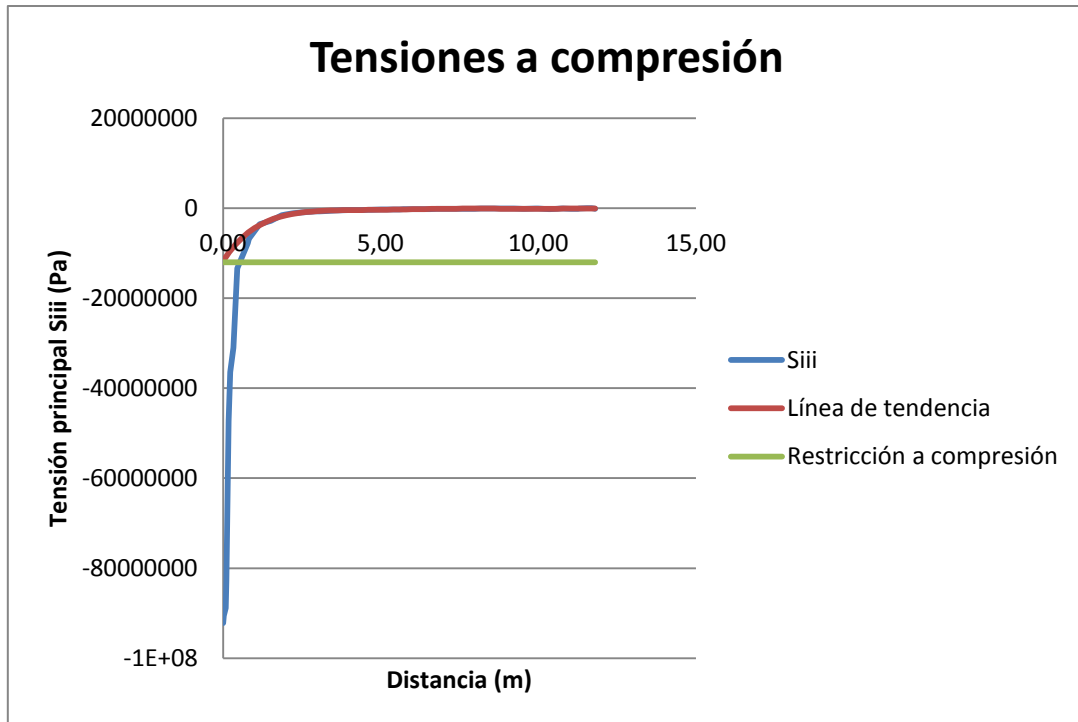


Figura 12. Gráfico extraído de GiD de las tensiones σ_3 de un segmento de la placa sometida a una carga uniformemente repartida de valor 1500 N/m^2 .



Gráfica 9. Valores reales y ficticios de las tensiones σ_3 de un segmento de la placa y ecuación de la aproximación polinómica.



Gráfica 10. Valores reales de las tensiones σ_3 de un segmento de la placa y la restricción a compresión.

A la vista de los resultados, la máxima tensión de compresión soportada por la placa de estudio sometida a la acción de su peso propio y de una carga uniformemente distribuida sobre su superficie de valor $1,5 \text{ KN/m}^2$ es $-11,7327 \text{ MPa}$. Por tanto, se concluye que entra dentro de los límites establecidos, pues es inferior a la restricción tensión de compresión máxima de -12 MPa .

A continuación se muestran las distribuciones de tensiones de la placa bajo una carga uniforme de 1500 N/m^2 .

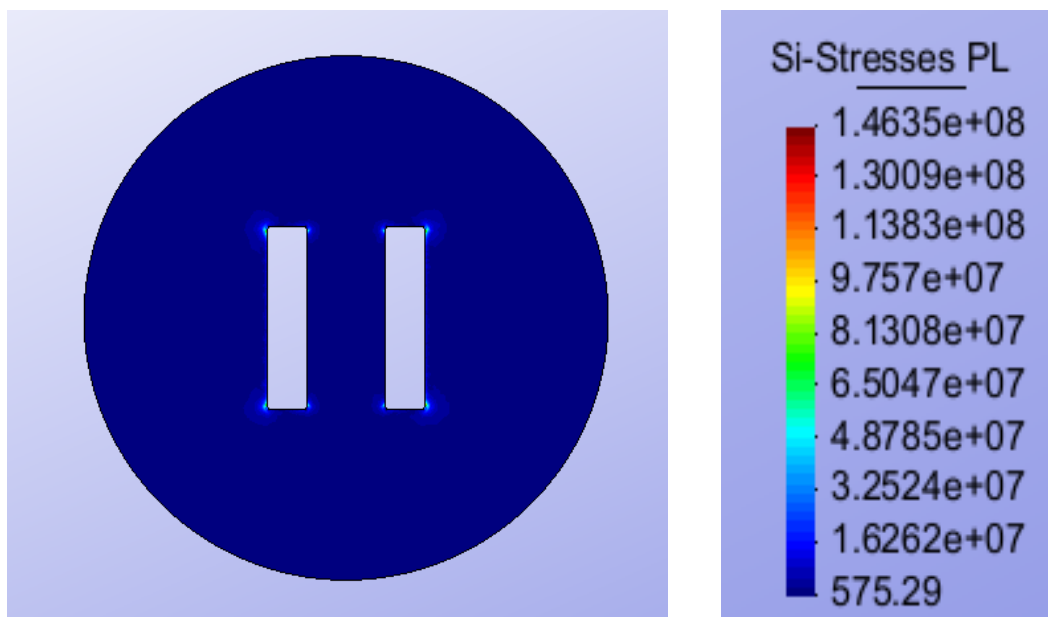


Figura 13. Tensiones principales σ_1 producidas en la estructura para el caso de cargas 2 (PP+carga uniforme de valor $1,5 \text{ KN/m}^2$).

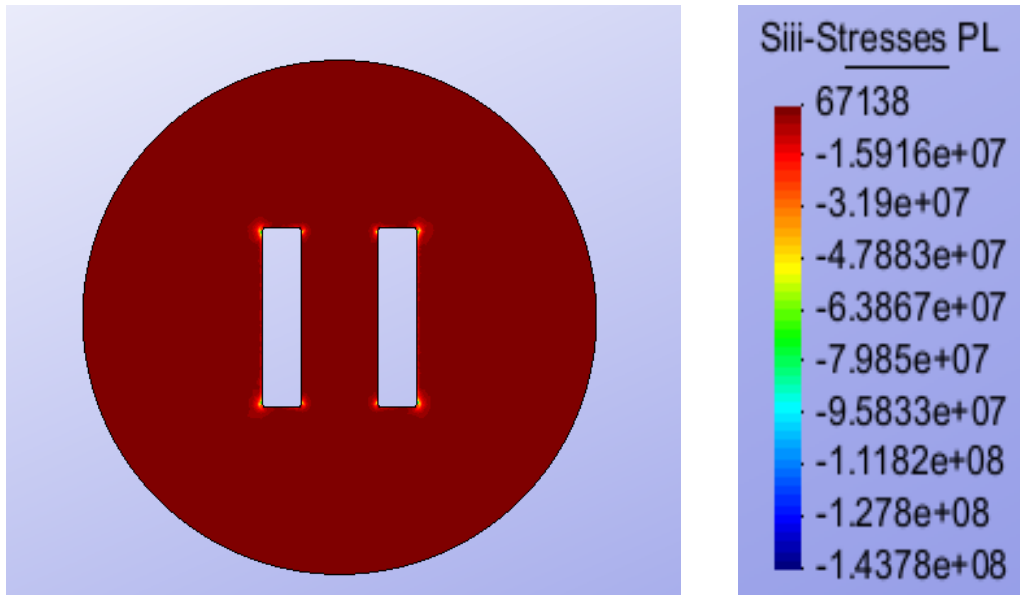


Figura 14. Tensiones principales σ_3 producidas en la estructura para el caso de cargas 2 (PP+carga uniforme de valor 1,5 KN/m²).

Se observa que las máximas tensiones, como ya se ha repetido a lo largo de esta práctica, se dan en los contornos de los agujeros de la placa, concretamente en las esquinas, en todo momento inferiores a los límites de tracción y compresión. Se destaca también el hecho de que el valor máximo de la tensión principal III es positivo, es decir, que en algunos puntos de la placa se produce compresión, mientras que en el resto tracción. En cambio, en el caso de la tensión principal I todos los valores son de tracción.

Seguidamente se muestran los resultados de desplazamientos verticales, en el eje "z", producidos en la placa bajo las condiciones de carga mencionadas.

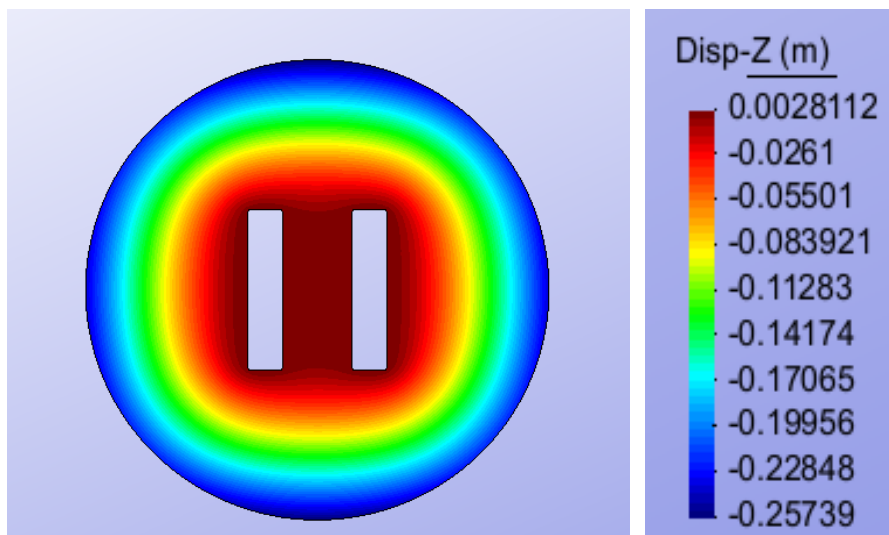


Figura 15. Desplazamientos producidos en la placa para el caso de cargas 2 (PP+carga uniforme de valor 1,5 KN/m²).

Se observa que los desplazamientos obtenidos bajo condiciones de carga de peso propio y la uniformemente distribuida dimensionada son superiores, como cabe esperar, a los obtenidos

en el caso de la placa sometida únicamente a la carga de su peso propio, aunque la diferencia es mínima, de aproximadamente 5 cm.

4. CONCLUSIONES

Para la resolución del problema, se ha considerado la tipología de placa de estudio. Al tratarse de una placa delgada, se ha realizado la discretización en elementos finitos de tipo triangular DKT de 3 nodos, los cuales son los más adecuados para implementar la teoría de Kirchoff, en contraposición con el resto de elementos, los cuales se adecúan a las características de la teoría de Reissner-Mindlin, recomendable para placas gruesas. De esta manera, se ha eliminado la posibilidad de obtener una solución rígida, influida por el bloqueo de cortante.

Además, en cuanto al tamaño de malla, se ha realizado el análisis de convergencia para el caso de carga de peso propio, determinando el valor óptimo de malla. Posteriormente, se ha resuelto el problema utilizando este tamaño de malla, para la hipótesis de carga de peso propio más carga uniformemente distribuida.

En el análisis de la placa de estudio, se han observado concentraciones de tensiones que debían ser estudiadas para poder determinar si se tratan de valores reales o ficticios. Así, se ha analizado si la concentración se da en un punto o en una zona. Si se da en una zona se trata de concentraciones reales y, consecuentemente, deben considerarse en el análisis; por el contrario, si se producen en un punto, se trata de concentraciones ficticias, por lo que deben obviarse.

Otra forma de analizar o evitar las concentraciones es redondear la zona y mallar lo suficiente para poder ajustarse al redondeo y, así, desaparecer las concentraciones ficticias.

Ambos aspectos se han considerado en el presente problema, redondeándose los cantos angulosos de la placa, mallando mucho más fino alrededor de los contornos de la misma y analizando si se daban en un único punto/s o en una zona. Así, haciendo uso de herramientas de GiD se han suprimido del análisis los valores no reales, con el objetivo de determinar la carga máxima real soportada por la placa.

Finalmente, tras un estudio iterativo de cargas, se ha determinado la solución del problema, es decir, la máxima carga soportada por la placa que hace cumplir las restricciones de tensiones impuestas en el enunciado: tensión máxima de tracción igual a 20 MPa y máxima de compresión de valor -12 MPa. El valor obtenido ha sido:

$$P = 1500 \text{ N/m}^2$$

Para el cual, las máximas tensiones producidas en la placa son:

$$\text{Tensión máxima de tracción} = 13,7570 \text{ MPa}$$

$$\text{Tensión máxima de compresión} = -11,7327 \text{ MPa}$$

