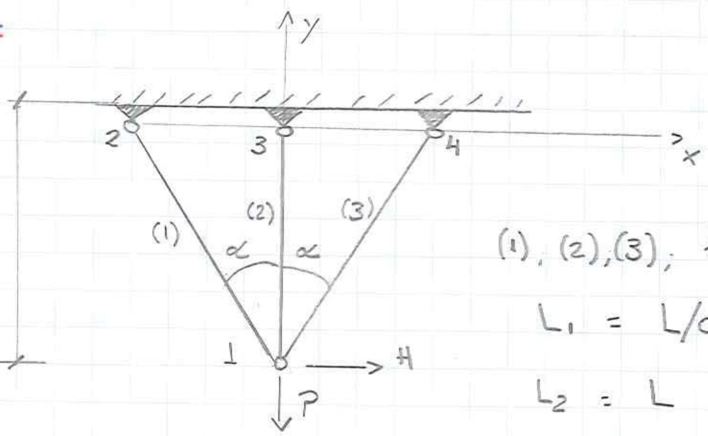
Assignment 1



$c = \cos\alpha$

$s = \sin\alpha$

L

$\cos(90° + \alpha) = -\sin(\alpha)$

$\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$

(1), (2), (3); truss E, A

$L_1 = L/c = L_3$

$L_2 = L$

Element stiffness eq in local coor

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_{x_i} \\ \bar{f}_{y_i} \\ \bar{f}_{x_j} \\ \bar{f}_{y_j} \end{Bmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{x_i} \\ \bar{U}_{y_i} \\ \bar{U}_{x_j} \\ \bar{U}_{y_j} \end{Bmatrix}$$

Globalization

- Element 1 $(c' = -s \; ; \; s' = c)$

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{Bmatrix}^{(1)} = \frac{E.A \cdot c}{L} \begin{bmatrix} (-s)^2 & -cs & -(-s)^2 & cs \\ -cs & c^2 & cs & -c^2 \\ -(-s)^2 & cs & (-s)^2 & -cs \\ cs & -c^2 & -cs & c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \end{Bmatrix}^{(1)}$$

- Element 2 $(c' = 0 \; ; \; s' = 1)$

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{x1} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{Bmatrix}^{(2)} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x3} \\ U_{y3} \end{Bmatrix}^{(2)}$$

∘ Element 3 $(c' = s \quad , \quad s' = c)$

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix}^{(3)} = \frac{E.A}{L} \cdot c \begin{bmatrix} s^2 & sc & -s^2 & -sc \\ sc & c^2 & -sc & -c^2 \\ -s^2 & -sc & s^2 & sc \\ -sc & -c^2 & sc & c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x4} \\ U_{y4} \end{Bmatrix}^{(3)}$$

<u>Expanded element stiffness eq</u>

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} cs^2 & -c^2s & -cs^2 & c^2s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c^3 & c^2s & -c^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & cs^2 & -c^2s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & c^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Symm} & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(2)} = \frac{E.\bar{A}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Symm} & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(3)} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} s^2c & sc^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s^2c & -sc^2 \\ & c^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -sc^2 & -c^3 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{SYMM} & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & s^2c & sc^2 \\ & & & & & & & c^3 \end{bmatrix}$$

<u>Master Stiffness Eq</u>

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^{(1)} + \underline{\underline{K}}^{(2)} + \underline{\underline{K}}^{(3)} \quad / \quad \underline{f} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{U}$$

$$\underline{\underline{K}} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2s^2c & 0 & -cs^2 & c^2s & 0 & 0 & -cs^2 & -c^2s \\ & 1+2c^3 & c^2s & -c^3 & 0 & -1 & -c^2s & -c^3 \\ & & cs^2 & -c^2s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & c^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{SYMM.} & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & cs^2 & c^2s \\ & & & & & & & c^3 \end{bmatrix} ; \quad \underline{U} = \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \\ U_{x3} \\ U_{y3} \\ U_{x4} \\ U_{y4} \end{Bmatrix} ; \quad \underline{f} = \begin{Bmatrix} H \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(a) Es el aporte a la rigidez del sistema el desplazamiento horizontal del nodo 3. Cómo el mismo pertenece al elemento (2) únicamente y este elemento sólo genera fuerzas en dirección longitudinal, que en coordenadas globales es dirección vertical por deformaciones en dicha dirección. Es por esto que los desplazamientos horizontales de dicho nodo no generan fuerzas

Boundary conditions

$U_{x2} = U_{y2} = U_{x3} = U_{y3} = U_{x4} = U_{y4} = 0$

$f_{x1} = H \quad f_{y1} = -P$

Equations applying BC

$$U_{x1} \cdot \frac{E.A}{L} \cdot 2S^2C = H \longrightarrow U_{x1} = \frac{H.L}{2EA\,S^2C}$$

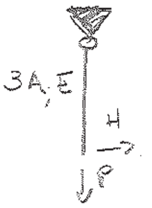
$$U_{y1} \cdot \frac{E.A}{L} \cdot (1+2C^3) = -P \longrightarrow U_{y1} = \frac{-P.L}{(1+2C^3)EA}$$

(c) For $\alpha \to 0 \quad C=1 \; ; \; S=0$

$\Rightarrow U_{x1} \to \infty$ if $H \neq 0$

$\Rightarrow U_{x1} = \frac{0}{0}$ if $H=0$ (equilibrio crítico)

Tiene sentido ya que sería una barra vertical con



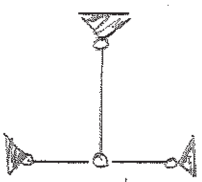
el área de 3 barras. No es un isostático sino que es un mecanismo, que gira en torno al apoyo si se aplica una fuerza horizontal, no ofrece resistencia. En cambio en sentido vertical al estirarse genera fuerzas internas

$\Rightarrow U_{y1} = \frac{-P.L}{3EA}$

For $\alpha \to \pi/2 \; ; \; C=0 \; ; \; S=1$.

$\Rightarrow U_{x1} \to \infty$ if $H \neq 0$; $\frac{0}{0}$ if $H=0$

$\Rightarrow U_{y1} \to \frac{-PL}{EA}$.



Al ser las 3 barras iguales, en horizontal la fuerza que genera una barra al estirarse es igual y opuesta a la genera la otra al acortarse, por lo que no puede equilibrar un esfuerzo horizontal. En vertical sólo aporta rigidez una única barra

Recovery of internal forces.

- Element (1).

$$\underline{U}^{(1)} = \left[\frac{HL}{2EAS^2C} ; \frac{-P.L}{(1+2c^3)EA} ; 0 ; 0\right] = \underline{U}^{(2)} = \underline{U}^{(3)} = \underline{U}$$

$$\bar{\underline{U}}^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -S & C & 0 & 0 \\ -C & -S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & C \\ 0 & 0 & -C & -S \end{bmatrix}}_{T^{(1)}} \cdot \underline{U} = \begin{bmatrix} \frac{-H.L}{2EAS.C} - \frac{P.L.C}{(1+2C^3)EA} \\ \frac{-H.L}{2EAS^2} + \frac{P.LS}{(1+2C^3)EA} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d^{(1)} = \bar{U}^{(1)}_{x_j} - \bar{U}^{(1)}_{x_i} = 0 + \frac{H.L}{2EAS.C} + \frac{PLC}{(1+2c^3)EA}$$

$$F^{(1)} = \frac{EA}{L} . C\, d^{(1)} = \frac{H}{2S} + \frac{P.C^2}{(1+2C^3)}$$

- Element (2)

$$\bar{\underline{U}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{U} = \begin{bmatrix} -P.L/(1+2c^3)EA \\ -H.L/2EAS^2C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d^{(2)} = P.L/(1+2c^3)EA \quad ; \quad F^{(2)} = \frac{EA}{L} . d^{(2)} = \frac{P}{(1+2c^3)}.$$

- Element (3).

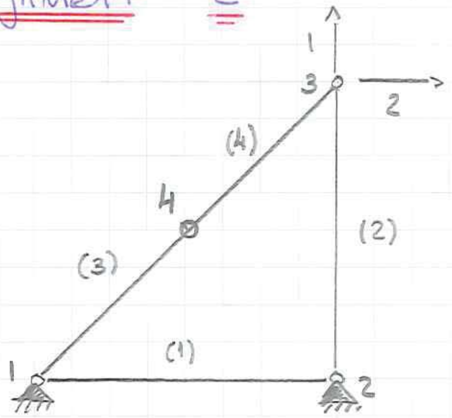
$$\bar{\underline{U}}^{(3)} = \begin{bmatrix} S & C & 0 & 0 \\ -C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & C \\ 0 & 0 & -C & S \end{bmatrix} \cdot \underline{U} = \begin{bmatrix} H.L/2EASC - PLC/(1+2C^3)EA \\ -HL/2EAS^2 - PLS/(1+2C^3)EA \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d^{(3)} = \frac{-HL}{2EASc} + \frac{PLc}{(1+2c^3)EA}$$

$$F^{(3)} = \frac{E.A}{L} c\, d^{(3)} = -\frac{H}{2S} + \frac{Pc^2}{(1+2c^3)}$$

(d) sólo pueden desarrollar fuerzas verticales, no van a poder equilibrar la fuerza H

Assignment 2



Globalized element stiffness

- Element 3

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{bmatrix}^{(3)} = 40 \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{bmatrix}^{(3)}$$

- Element 4

$$\begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{bmatrix}^{(4)} = 40 \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{bmatrix}^{(4)}$$

Element 1, 2 same as in the lesson.

Master stiffness eq

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^{(1)} + \underline{\underline{K}}^{(2)} + \underline{\underline{K}}^{(3)} + \underline{\underline{K}}^{(4)}$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 30 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & -20 & -20 \\ 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & -20 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & -20 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 & 25 & -20 & -20 \\ -20 & -20 & 0 & 0 & -20 & -20 & 40 & 40 \\ -20 & -20 & 0 & 0 & -20 & -20 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

Boundary condition

$$\begin{Bmatrix} f_{x2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & -20 & -20 \\ 0 & 20 & 25 & -20 & -20 \\ 0 & -20 & -20 & 40 & 40 \\ 0 & -20 & -20 & 40 & 40 \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{bmatrix}$$

$\det(\underset{=}{K}^*) = 0$ (calculado x software)

$\Rightarrow K^*$ es singular

$\Rightarrow$ El problema no admite solución única.

Esto se produce ya que al agregar la rótula en el elemento (3) el problema dejo de ser isostático y se volvió un mecanismo. Una carga en el nodo 4 perpendicular a la barra no puede ser equilibrada. El sistema puede equilibrar las fuerzas propuestas según distintas configuraciones de las incógnitas u_{x4} y u_{y4}. (no hay solución única)